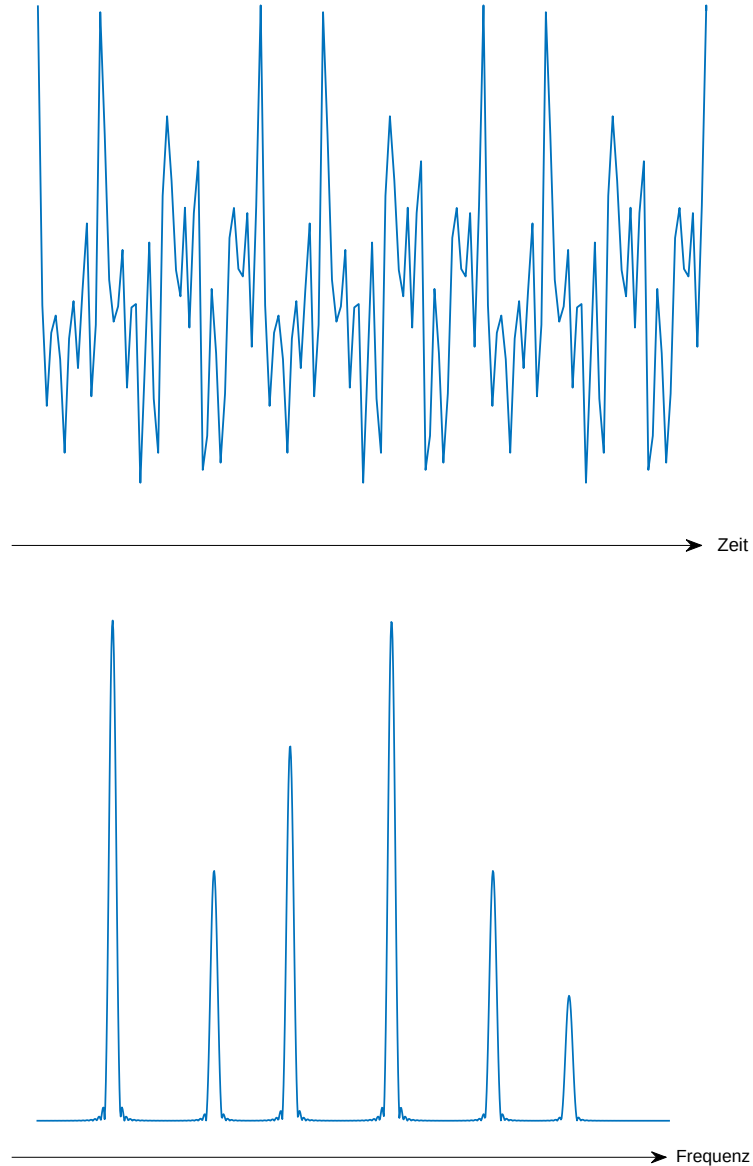


Verborgene Zyklen und der Einfluss der NAO in Klimadaten: Eine Fourier-Analyse



Autor: Aarvalan Saravanaperumal, M6g

Betreuer: Lukas Zuberbühler

Maturitätsarbeit an der Kantonsschule Zürich Nord

Zürich, November 2024

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Fragestellungen	1
1.2	Stand der Technik	1
1.3	Aufbau und Ziel der Arbeit	2
2	Methodik	3
2.1	Nordatlantische Oszillation (NAO)	3
2.2	Daten	4
2.2.1	Temperatur- und Niederschlagsdaten	4
2.2.2	NAO-Index	5
2.3	Fourier-Analyse	6
2.3.1	Fourierreihen	6
2.3.2	Fourier-Transformation	8
2.3.3	Diskrete und Fast Fourier-Transformation	9
2.3.4	Frequenzspektrum	10
2.3.5	Aliasing	12
2.3.6	Leakage	12
2.3.7	Trends	14
2.4	Signifikanztest	15
2.5	MATLAB	16
2.6	Vorgehensweise	16
2.6.1	Datenvorverarbeitung	16
2.6.2	Fourier-Analyse	17
2.6.3	Signifikanztest	17
2.6.4	Visualisierung	18
2.6.5	Interpretation des Frequenzspektrums	19
3	Resultate	21
3.1	Temperaturdaten	21
3.1.1	Frequenzspektren	21
3.1.2	Signifikanztest	24
3.2	Niederschlagsdaten	26
3.2.1	Frequenzspektren	26
3.2.2	Signifikanztest	29
3.3	NAO-Index	32
3.3.1	Frequenzspektren	32
3.3.2	Signifikanztest	35
3.4	Vergleich der Frequenzspektren	37
3.4.1	NAO-Index und Temperaturdaten	37
3.4.2	NAO-Index und Niederschlagsdaten	40
4	Diskussion	43
4.1	Limitationen der Methodik	43
4.1.1	Fourier-Analyse	43
4.1.2	Signifikanztest	44
4.2	Identifikation und Interpretation der Zyklen	44
4.2.1	Temperaturdaten	44
4.2.2	Niederschlagsdaten	45
4.2.3	NAO-Index	46



4.3	Zusammenhang zwischen NAO und Klimadaten	47
4.3.1	Temperatur- und Niederschlagsdaten als Ganze	48
4.3.2	Jahreszeiten	48
4.3.3	Frequenzbereiche	49
4.4	Ausblick	50
4.5	Schlusswort	51
A	Matlab-Codes	52
A.1	Temperaturdaten und NAO-Index	52
A.2	Niederschlagsdaten und NAO-Index	57
B	Darstellungen der Rohdaten	61
B.1	Temperaturdaten	61
B.2	Niederschlagsdaten	63
B.3	NAO-Index	67

Glossar

Fourier-Analyse Mathematisches Werkzeug zur Identifikation periodischer Muster [1].

Nordatlantische Oszillation (NAO) Atmosphärische Variabilität im Nordatlantik, charakterisiert durch das Wechselspiel der Druckdifferenzen zwischen dem Azorenhoch und dem Islandtief, gemessen im NAO-Index [2][3].

Azorenhoch/Islandtief Druckgebiete, die unser Wetter stark prägen [3].

NAO-Index Index zur Messung der NAO; stationenbasierter Ansatz in dieser Arbeit verwendet Luftdruckmessungen von Lissabon und Reykjavík [4].

Homogenisierung Entfernung von künstlichen Veränderungen wie Standortwechsel oder Instrumentenänderungen in Messdaten [5].

Fourierreihen Darstellung periodischer Funktionen als Summe von Sinus- und Kosinuscurven mit bestimmten Frequenzen und Amplituden; die komplexe Fourierreihe enthält komplexe Exponenten [1].

Negative Frequenzen Frequenzen, die in der Fourier-Analyse auftreten und dieselben Informationen wie die positiven Frequenzen enthalten [1].

Fourierkoeffizienten Koeffizienten a_k , b_k und c_k , welche die Amplitude und Phase der einzelnen Frequenzen der Fourierreihe bestimmen [1].

Grundfrequenz Niedrigste Frequenz einer periodischen Funktion mit Periode T , definiert durch $f_1 = \frac{1}{T}$ [1].

Fourier-Transformation Transformiert kontinuierliche Funktionen vom Zeitbereich in ein Frequenzspektrum, um periodische Muster zu erkennen [1].

kontinuierlich Beschreibt Daten oder Funktionen, die ohne Unterbrechung für jeden Punkt in einem Bereich definiert sind.

Nullpeak Amplitude bei der Frequenz $f = 0$, die dem Mittelwert der Daten entspricht [1].

Frequenzspektrum Zeigt, welche Frequenzen wie stark in einer Funktion vertreten sind [1].

Diskrete Fourier-Transformation (DFT) Transformiert diskrete, d.h. nicht-kontinuierliche Daten vom Zeitbereich in ein Frequenzspektrum [1].

diskret Beschreibt Daten, die nur an bestimmten, klar getrennten Punkten existieren, im Gegensatz zu kontinuierlichen Daten [1].

Sampling Prozess, bei dem eine kontinuierliche Funktion in regelmässigen Abständen gemessen und in einzelne Punkte umgewandelt wird [1].

Sampling-Frequenz Frequenz, mit welcher der Sampling-Prozess einer kontinuierlichen Funktion stattfindet [1].

Fast Fourier-Transformation (FFT) Effizienter Algorithmus zur Berechnung der DFT [1].

Normierung Anpassung des Frequenzspektrums, um die Amplituden proportional zur Datenlänge N zu skalieren, typischerweise durch $\frac{1}{N}$ [1].

Aliasing Fehlerhafte Darstellung hoher Frequenzen als niedrigere, wenn die Sampling-Frequenz f_s zu gering ist, gemäss dem Nyquist-Shannon-Sampling-Theorem [1].

Nyquist-Frequenz f_{nyq} Die höchste Frequenz, die bei einer gegebenen Sampling-Frequenz f_s korrekt dargestellt werden kann; gleich der halben Sampling-Frequenz f_s [1].

Nyquist-Shannon-Sampling-Theorem Theorem, das besagt, dass die maximal darstellbare Frequenz ohne Aliasing die Nyquist-Frequenz $f_{nyq} = \frac{f_s}{2}$ ist [1].

Anti-Aliasing-Filter Filter, der hohe Frequenzen vor dem Sampling entfernt, um Aliasing zu minimieren [6].

Alias-Frequenzen Falsch dargestellte Frequenzen, die entstehen, wenn Aliasing auftritt [1].

Leakage Verzerrung im Frequenzspektrum durch unvollständige Perioden in diskreten Daten; minimiert durch Tapers [1].

Taper Fensterfunktion, die abrupte Übergänge in den Daten glättet, um Leakage im Frequenzspektrum zu reduzieren [1].

Hann-Window Fensterfunktion zur Minimierung von Leakage [1].

Hamming-Window Fensterfunktion ähnlich dem Hann-Window zur Minimierung von Leakage [1].

Trend Langfristige, nicht-periodische Komponente in Daten, die das Frequenzspektrum im niedrigen Frequenzbereich verzerrt [1].

Detrend Entfernung des Trends aus den Daten, um Verzerrungen im niedrigen Frequenzbereich zu minimieren [1].

Signifikanztest Statistischer Test, der überprüft, ob die Amplituden im Frequenzspektrum durch Zufall oder durch reale klimatologische Prozesse verursacht wurden.

Nullhypothese H_0 Hypothese, dass die Amplituden im Frequenzspektrum ausschliesslich durch zufälliges Rauschen verursacht wurden. H_0 wird verworfen, wenn der Signifikanztest zeigt, dass die Amplituden nicht durch Zufall erklärbar sind.

Alternativhypothese H_1 Hypothese, dass die Amplituden im Frequenzspektrum durch reale klimatologische Prozesse verursacht wurden. H_1 wird angenommen, wenn H_0 verworfen wird.

Nullmodell Referenzmassstab auf Basis von Red Noise zur Annahme bzw. Verwerfung der Nullhypothese H_0 [7].

Red Noise Form des Rauschens, dessen Power im Power-Spektrum umgekehrt proportional zur Frequenz ist; dient hier als Grundlage für das Nullmodell der Signifikanztests [1][7].

Power Quadrierte Amplitude [1].

Power-Spektrum Quadriertes Frequenzspektrum [1].

95%-Konfidenzintervall Schwelle, ab welcher Peaks mit einer Sicherheit von 95% signifikant sind.

MATLAB Software für numerische Berechnungen, besonders geeignet für die Fourier-Analyse [8][9].

Datenvorverarbeitung Vorverarbeitung der Daten, um Verzerrungen im Frequenzspektrum zu minimieren.

Zero-Padding Erweiterung eines Datensatzes mit Nullen, um die DFT glatter darzustellen, ohne zusätzliche Informationen zu gewinnen [1].

Ober- und Unterschwingungen Frequenzen, die ein Vielfaches bzw. ein Bruchteil einer bestimmten Frequenz sind. Die Ursache dieser Frequenzen ist dieselbe [10].

Short-Time Fourier-Transformation (STFT) Erweiterung der Fourier-Analyse durch die Zerlegung in kurze Zeitfenster, um zeitliche Änderungen im Frequenzspektrum zu erfassen [1].

Spektrogramm Grafische Darstellung eines zeitlich veränderlichen Frequenzspektrums, basierend auf der STFT [1].

Wavelet-Analyse Alternative zur Fourier-Analyse, welche eine höhere Auflösung im Spektrum erzielt [11].

Vorwort

Von Beginn an war mir klar, dass meine Maturitätsarbeit eine praktische Anwendung der Mathematik betreffen würde. Auf der Suche nach einem geeigneten Thema stiess ich auf ein YouTube-Video über die Fast Fourier-Transformation (FFT) [12], das ihre faszinierende Geschichte und einige ihrer spannenden Anwendungen präsentierte.

Ich fand es faszinierend, wie vielseitig die Anwendungen der FFT sind, und wollte eine dieser Anwendungen in meiner Maturitätsarbeit behandeln. Durch meinen Geographielehrer und Betreuer Herrn Zuberbühler kam ich auf die Idee, die FFT zur Analyse von Klimadaten einzusetzen, was perfekt zu meinem eigenen Interesse an der Klimatologie passt.

Danksagungen

An dieser Stelle möchte ich mich bei meinen Eltern und Freunden, die mich während der Arbeitszeit unterstützt haben, bedanken. Mein ausserordentlicher Dank geht an Herrn Zuberbühler, der mich bei der Themensuche unterstützte und mir bei Fragen und Problemen während des ganzen Arbeitsprozesses zur Seite stand.

1 Einleitung

Klimadaten bieten wertvolle Einblicke in die komplexen Prozesse, die unser Wetter beeinflussen. Obwohl das Wetter oft spontan und unvorhersehbar erscheint, verbergen sich hinter den Schwankungen der Temperatur und des Niederschlags regelmässige Zyklen. Diese entstehen durch klimatologische Faktoren, die das Wetter über Jahre oder Jahrzehnte hinweg prägen. Um sie sichtbar zu machen und genauer zu analysieren, sind mathematische Methoden erforderlich, die versteckte Muster in den Daten aufdecken.

Eine solche Methode ist die Fourier-Analyse. Dieses mathematische Werkzeug ermöglicht es, Zyklen in den Daten zu identifizieren. Der in der Praxis häufig verwendete Algorithmus zur Berechnung, die Fast Fourier-Transformation (FFT), ist besonders effizient und erlaubt es, grosse Datensätze schnell und präzise auf Zyklen zu untersuchen. Mithilfe dieser Technik können Zyklen sichtbar gemacht werden, die zunächst verborgen bleiben und die mit einfachen Methoden nicht erkennbar wären. [1]

Ein besonders relevanter klimatologischer Faktor, der solche Zyklen im europäischen Raum prägt, ist die Nordatlantische Oszillation (NAO) [2]. Die NAO, gemessen im sogenannten NAO-Index, beschreibt die Schwankungen im Luftdruck über dem Nordatlantik und hat erhebliche Auswirkungen auf die Temperatur- und Niederschlagsmuster in Europa [2]. Mit der Fourier-Analyse lassen sich nicht nur verborgene Zyklen, sondern auch die Einflüsse der NAO auf das Wetter detailliert analysieren.

1.1 Fragestellungen

Das Thema dieser Maturitätsarbeit lautet «Verborgene Zyklen und Einfluss der NAO in Klimadaten: Eine Fourier-Analyse». Um dieses Thema systematisch und gegliedert zu bearbeiten, wurden folgende Leitfragen gewählt:

1. Wie kann die Fast Fourier-Transformation (FFT) verwendet werden, um Zyklen in den Temperatur- und Niederschlagsdaten sowie im NAO-Index zu identifizieren?
2. Inwiefern korrelieren die Frequenzspektren der Temperatur- und Niederschlagsdaten mit den Frequenzspektren des NAO-Index?
3. Wie lässt sich eine mögliche Korrelation erklären?

1.2 Stand der Technik

Die Fourier-Analyse ist eine etablierte Methode, um Zyklen in Klimadaten zu identifizieren. Eine der ersten Anwendungen der Fourier-Analyse auf Klimadaten wurde 1984 in einem Paper von Salcedo et al. [13] vorgestellt. In diesem Paper wurde eine Methode entwickelt, um die Fourier-Analyse auf Sonneneinstrahlungs- und Temperaturdaten in Barcelona anzuwenden. In den darauffolgenden Jahren gab es zahlreiche weiterführende Ansätze [14][15]. Auch heute wird die Fourier-Analyse auf Klimadaten angewendet, häufig in Kombination mit anderen Techniken [16].

Es wurde vielfach nachgewiesen, dass die NAO einen erheblichen Einfluss auf das Wettergeschehen in Europa hat [17][18][19][20]. Zahlreiche Papers belegen, wie die NAO die Temperatur und den Niederschlag beeinflusst. So zeigt unter anderem Hurrell [20] in einem Paper, dass die NAO einen stärkeren Einfluss auf die Temperatur als auf den Niederschlag hat. Ferner konnte Hurrell in demselben Paper [20] zeigen, dass die NAO neben kurzfristigen Zyklen auch von langfristigen, dekadischen Zyklen beeinflusst wird. Des Weiteren zeigen die meisten Papers [17][18][19][20][21], welche den Einfluss der NAO auf Klimadaten untersuchen, dass die NAO besonders im Winter einen massgeblichen Einfluss auf das Wettergeschehen in Europa ausübt.

1.3 Aufbau und Ziel der Arbeit

Diese Maturitätsarbeit gliedert sich in zwei Teile. Im ersten Teil werden Zyklen in den Temperatur- und Niederschlagsdaten sowie im NAO-Index identifiziert. Dafür wird die Fourier-Analyse auf selbst gewählte Datensätze angewendet. Im zweiten Teil werden die Frequenzspektren der Temperatur- und Niederschlagsdaten mit den Frequenzspektren des NAO-Index in verschiedenen Aspekten verglichen und analysiert. Ziel in diesem Teil ist es, den komplexen und vielseitigen Einfluss der NAO, der zuvor beschrieben wurde, aufzuzeigen.

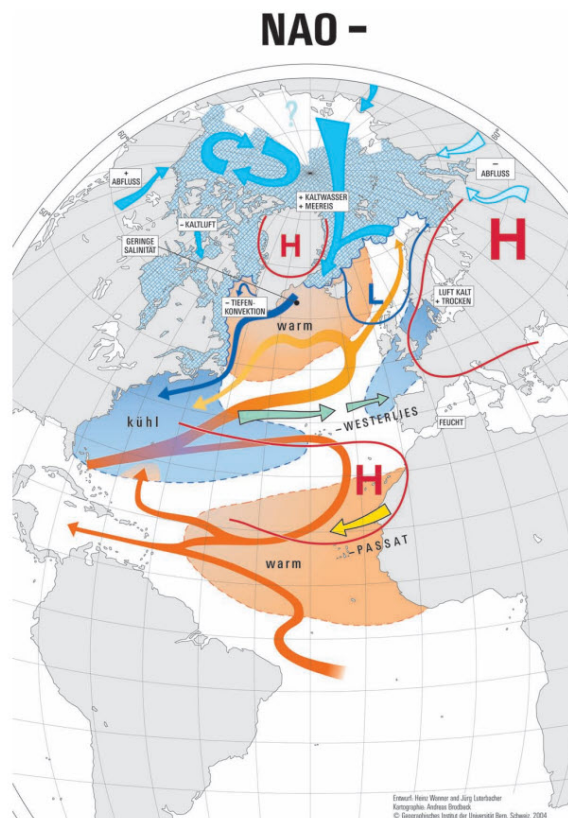


Abb. 2.2: Auswirkungen eines negativen NAO-Index auf die Wetterlage. Hochdruckgebiete sind mit «H» und Tiefdruckgebiete mit «L» gekennzeichnet. [22]

2.2 Daten

2.2.1 Temperatur- und Niederschlagsdaten

Die in dieser Maturitätsarbeit verwendeten Temperatur- und Niederschlagsdaten stammen vom Datenportal IDAweb, das MeteoSchweiz für die Lehre und Forschung zur Verfügung stellt [23]. Da die Fourier-Analyse nicht mit beliebig vielen Messstationen durchgeführt werden konnte, musste eine ausgewählt werden. Für diese Maturitätsarbeit wurden Daten der Messstation Zürich-Fluntern gewählt, die sich durch ihre geografische Nähe auszeichnen. Die Aufzeichnung der Temperatur- und Niederschlagsdaten in Zürich-Fluntern reicht bis ins Jahr 1864 zurück. Die Abbildungen 2.3 und 2.4 zeigen die unverarbeiteten Temperatur- und Niederschlagsdaten.

Eine Besonderheit der Daten von IDAweb liegt in der Homogenisierung. Diese entfernt künstliche Veränderungen in den Messreihen. Zu diesen künstlichen Veränderungen gehören bei der Messstation Zürich-Fluntern eine Verschiebung der Messstation um 80 Höhenmeter sowie ein Wechsel des Wetterhüttentyps. Homogenisierte Klimareihen zeigen ein unverfälschtes Bild der Klimaentwicklung in der Vergangenheit und ermöglichen es, korrekte Aussagen über den Klimaverlauf zu treffen. Abbildung 2.5 illustriert, wie die Homogenisierung Messdaten beeinflusst. [5]

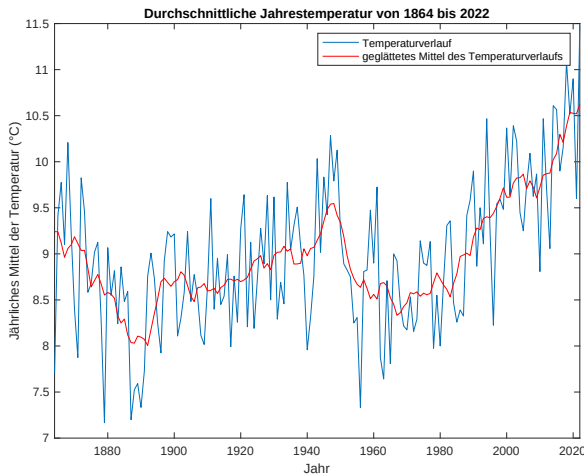


Abb. 2.3: Durchschnittliche Jahrestemperatur an der Messstation Zürich-Fluntern von 1864 bis 2022. Der geglättete Verlauf ist rot eingezeichnet. (eigene Darstellung)

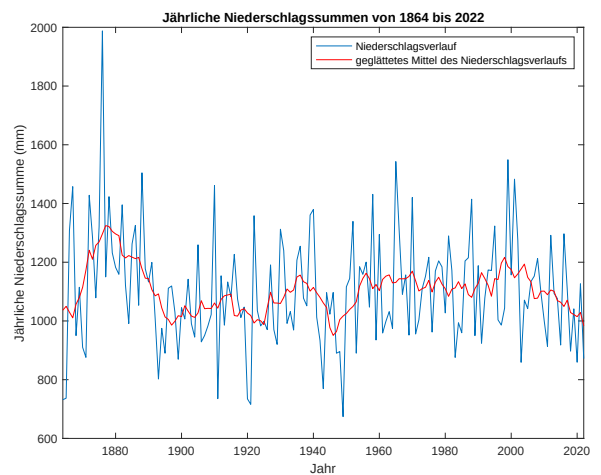


Abb. 2.4: Jährliche Niederschlagssummen an der Messstation Zürich-Fluntern von 1864 bis 2022. Der geglättete Verlauf ist rot eingezeichnet. (eigene Darstellung)

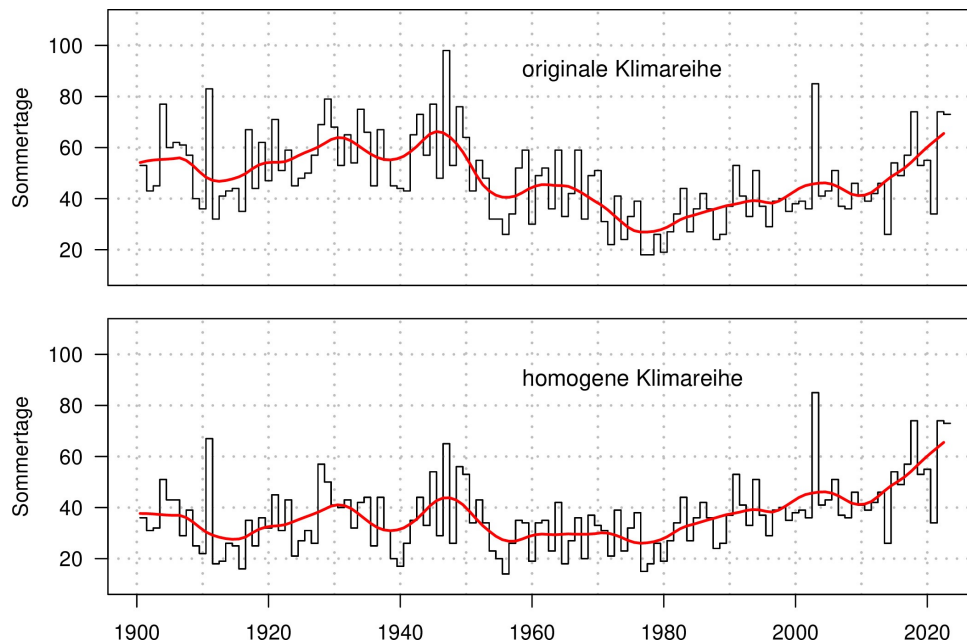


Abb. 2.5: Vergleich einer originalen Klimareihe mit einer homogenen Klimareihe. Gezeigt sind die Anzahl Sommertage pro Jahr von 1901 bis 2022. Der geglättete Verlauf beider Klimareihen ist rot eingezeichnet. [5]

2.2.2 NAO-Index

Die Berechnung des NAO-Index kann auf unterschiedliche Weise erfolgen. Ein Ansatz verfolgt die saisonalen Bewegungen des Islandtiefs und des Azorenhochs, um daraus den NAO-Index zu berechnen [24]. Für diese Maturitätsarbeit wurde jedoch ein stationenbasierter NAO-Index verwendet, der aus Luftdruckmessungen von Wetterstationen in der Nähe des Islandtiefs und des Azorenhochs den Index berechnet [4].

Der verwendete NAO-Index stammt vom National Center for Atmospheric Research (NCAR), einem US-amerikanischen Forschungsinstitut im Bereich der Atmosphärenwissenschaften [25]. Er basiert auf der Luftdruckdifferenz zwischen Lissabon und Reykjavík und reicht aufgrund der langjährigen Dokumentation des Luftdrucks in diesen Städten bis ins Jahr 1865 zurück [4]. Dadurch deckt der Index einen

Zeitraum ab, der deutlich länger ist als der anderer NAO-Indizes [4] und eignet sich daher besonders gut für die Fourier-Analyse. Ein Nachteil dieses stationenbasierten Ansatzes liegt in der Datenqualität, da der Luftdruck in Städten durch klimatologische Phänomene beeinflusst werden kann, die nicht direkt mit der NAO zusammenhängen [4]. Abbildung 2.6 zeigt den unverarbeiteten NAO-Index.

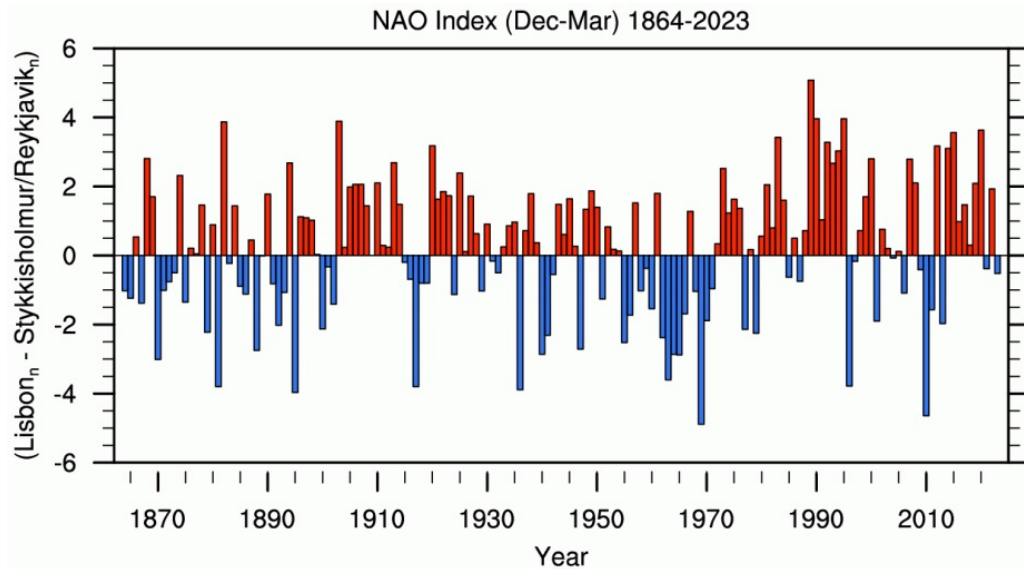


Abb. 2.6: Stationenbasierter jährlicher NAO-Index von 1864 bis 2023. [4]

2.3 Fourier-Analyse

Die Fourier-Analyse, entwickelt von Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768–1830), ist ein mathematisches Werkzeug zur Zerlegung von Funktionen in Sinus- und Kosinuskurven bzw. Frequenzen [26]. Diese Zerlegung ermöglicht es, Zyklen in Daten zu identifizieren.

Die Fourier-Analyse hat nebst der Identifikation von Zyklen zahlreiche Anwendungen in alltäglichen Technologien: Fast alles, was mit der Übertragung und Verarbeitung von Daten zusammenhängt, wäre ohne sie nicht möglich. So würden beispielsweise ohne die Fourier-Analyse weder moderne Mobilfunknetze noch Bildverarbeitungstechnologien existieren. [1]

In dieser Maturitätsarbeit wird die Fourier-Analyse auf Klimadaten angewendet. Bevor diese praktische Anwendung folgt, werden die theoretischen Grundlagen dieser Methode ausführlich erläutert.

2.3.1 Fourierreihen

Jede periodische Funktion kann als Summe von Sinus- und Kosinuskurven dargestellt werden. Auf dieser Tatsache beruhen die Fourierreihen: Eine Fourierreihe ist die Darstellung einer kontinuierlichen, periodischen Funktion als eine Summe von Sinus- und Kosinuskurven. Die Fourierreihe einer periodischen Funktion $x(t)$ mit der Periode T lautet: [1]

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2\pi f_k t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(2\pi f_k t) \quad (1)$$

Die Koeffizienten a_k und b_k werden Fourierkoeffizienten genannt. Diese Fourierkoeffizienten bestimmen die Amplitude sowie die Phase der einzelnen Sinus- und Kosinuskurven. Sie werden wie folgt berechnet: [1]

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos(2\pi f_k t) dt \quad (2)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin(2\pi f_k t) dt \quad (3)$$

Die Frequenzen f_k der Sinus- und Kosinuskurven sind Vielfache der Grundfrequenz f_1 , d.h. $f_k = k \cdot f_1$ ($k \in \mathbb{Z}$). Die Grundfrequenz f_1 entspricht einer Periode der zu analysierenden Funktion, weshalb $f_1 = \frac{1}{T}$ gilt. [1]

Die Fourierreihe wird gemäss der Formel 1 zu einer unendlichen Summe von Termen. Mit jedem zusätzlichen Term nähert sich die Fourierreihe der ursprünglichen Funktion genauer an [1]. Abbildung 2.7 zeigt eine periodische Rechteckfunktion mit ihrer Fourierreihe.

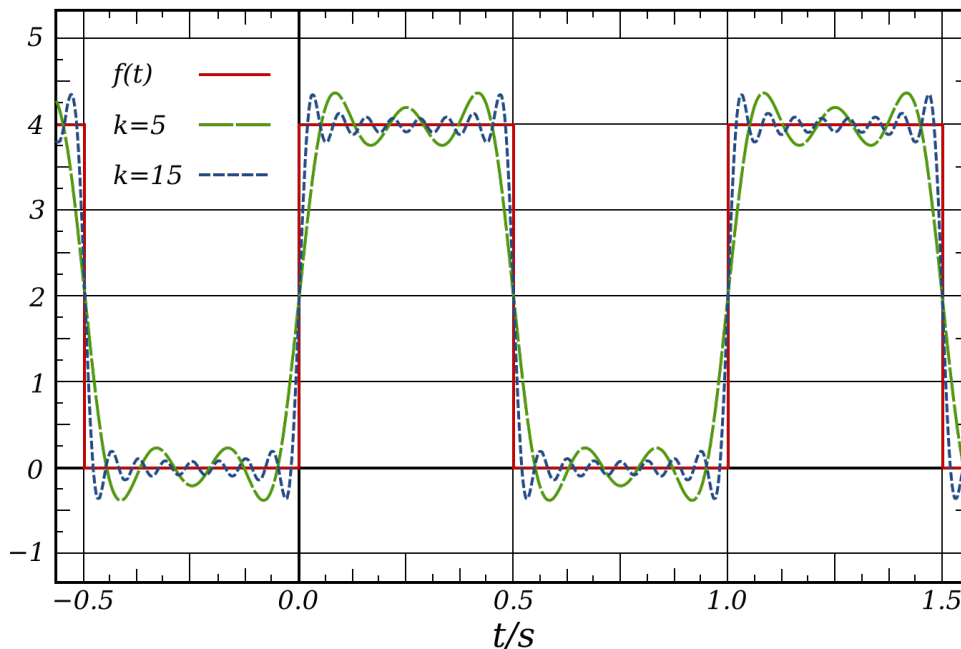


Abb. 2.7: Periodische Rechteckfunktion $f(t)$ mit den ersten fünf sowie den ersten fünfzehn Termen ihrer Fourierreihe. [27]

Im weiteren Verlauf wird die Formel 1 nicht mehr benötigt. Stattdessen wird eine Formel mit komplexen Exponenten verwendet, welche die kommenden Formeln stark vereinfacht. Durch die Euler'sche Formel¹ und diversen Umformungen erhält man die komplexe Fourierreihe: [1]

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2\pi i f_k t} \quad (4)$$

Die komplexe Fourierreihe enthält einen neuen Fourierkoeffizienten c_k , der direkt von a_k und b_k abhängt. Er wird wie folgt berechnet: [1]

$$c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k) = \int_0^T x(t) e^{-2\pi i f_k t} dt \quad (5)$$

¹ $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$ [1]

Durch die Erweiterung mit komplexen Exponenten existieren sowohl positive als auch negative Frequenzen. Da die Fourierkoeffizienten c_k und c_{-k} komplex konjugiert sind², tragen die dazugehörigen Frequenzen f_k und f_{-k} dieselben Informationen. Diese Symmetrie ist für die Fourier-Transformation von Bedeutung, da sie deren Interpretation vereinfacht. [1]

2.3.2 Fourier-Transformation

In dieser Maturitätsarbeit liegt der Fokus auf den einzelnen Frequenzen einer Funktion, während die Fourierreihe selbst nicht im Mittelpunkt steht. Mithilfe der Fourierkoeffizienten der Fourierreihe lässt sich bestimmen, wie stark bestimmte Frequenzen, d.h. die Sinus- und Cosinuswellen, in einer Funktion vertreten sind. Jedoch enthält die Fourierreihe nur Frequenzen, welche Vielfache der Grundfrequenz f_1 sind. [1]

Um jedoch das gesamte Frequenzspektrum einer Funktion zu erhalten – also alle möglichen Frequenzen und ihre jeweiligen Amplituden – wird die Fourier-Transformation verwendet. Im Gegensatz zur Fourierreihe, die nur bestimmte, festgelegte Frequenzen berücksichtigt, deckt die Fourier-Transformation somit ein kontinuierliches Spektrum mit unendlich vielen Frequenzen ab. [1]

Der wichtigste Aspekt der Fourier-Transformation für die verwendeten Datensätze ist, dass mit ihr auch nicht-periodische Funktionen in ein Frequenzspektrum transformiert werden können [1]. Das ist entscheidend für diese Maturitätsarbeit, da die natürliche Variabilität (Abweichung vom Mittelwert) der Klimadaten nicht nur periodisch ist. Sie folgen auch aperiodischen Mustern, die auf zufällige Schwankungen zurückzuführen sind.

Die Formel für die Fourier-Transformation stellt eine Erweiterung der Formel für die Fourierreihe dar. Wenn die Periode T in der Fourierreihe gegen unendlich strebt, wird die Summe zu einem Integral. Dies bildet die Grundlage für die Fourier-Transformation. Die Formel für die Fourier-Transformation lautet wie folgt: [1]

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-2\pi ift} dt \quad (6)$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{2\pi ift} df \quad (7)$$

Um vom Zeitbereich (d.h. einer Funktion, die von der Zeit t abhängt) zum Frequenzspektrum (d.h. einer Funktion, die von den Frequenzen f abhängt) zu gelangen, wird die Formel 6 genutzt. Für die Umkehrung ist die Formel 7 erforderlich. [1]

Abbildung 2.8 zeigt die Fourier-Transformation einer kontinuierlichen, nicht-periodischen Funktion. Da die Amplituden im Frequenzspektrum nach Formel 6 komplex sind, wird immer der Betrag dieser Amplituden dargestellt. In Abbildung 2.8 ist besonders die Symmetrie zwischen den positiven und negativen Frequenzen f_k und f_{-k} hervorzuheben, die das Frequenzspektrum achsensymmetrisch zur y-Achse machen.

Die Amplitude bei der Frequenz 0 entspricht dem Mittelwert der ursprünglichen Funktion [1]. Dieser sogenannte Nullpeak wird im Folgenden nicht weiter behandelt, da er nur mathematischer Natur ist und keine weiteren Informationen über die Daten liefert.

²siehe Formel 5

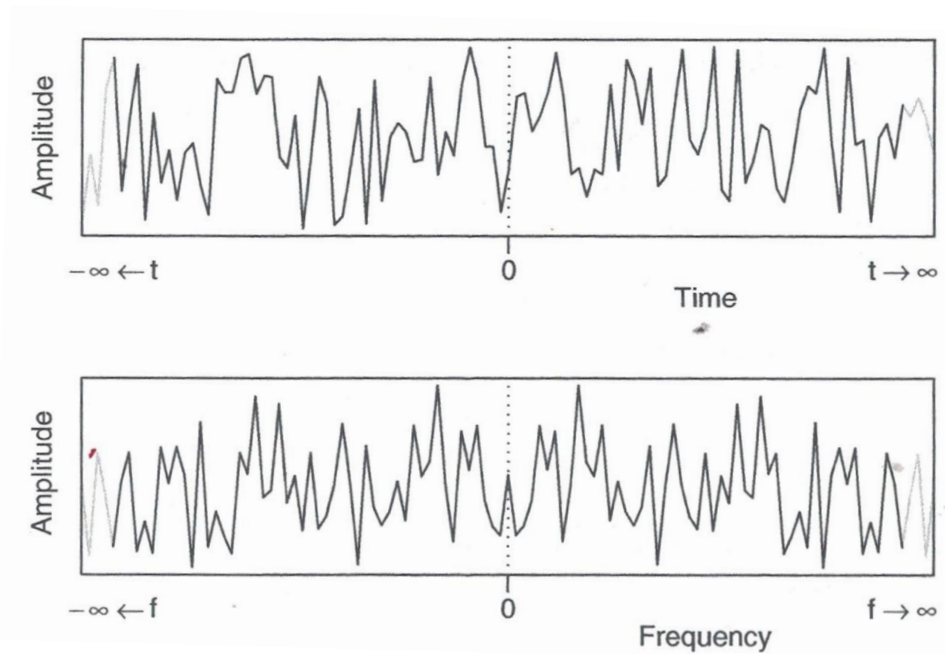


Abb. 2.8: Fourier-Transformation einer kontinuierlichen Funktion: Oben ist die ursprüngliche, kontinuierliche Funktion dargestellt, während unten das Frequenzspektrum dieser Funktion zu sehen ist. [1]

2.3.3 Diskrete und Fast Fourier-Transformation

Die Fourier-Transformation funktioniert nur mit kontinuierlichen Funktionen, die beliebig lang sind. Für endliche, nicht-kontinuierliche Daten (sogenannte diskrete Daten³), wie sie in dieser Maturitätsarbeit verwendet werden, wird die diskrete Fourier-Transformation (DFT) benötigt. Den hoch-optimierten Algorithmus zur Berechnung der DFT nennt man Fast Fourier-Transformation (FFT). In der Praxis sind die Begriffe DFT und FFT daher gleichbedeutend. [1]

Um die DFT bei einer kontinuierlichen Funktion anzuwenden, muss diese zuerst in eine begrenzte Anzahl von Punkten umgewandelt werden. Dieser Prozess wird als Sampling bezeichnet. Dabei wird die Funktion während eines Zeitraums T in regelmässigen Zeitintervallen Δt mit einer Sampling-Frequenz $f_s = \frac{1}{\Delta t}$ gesampelt. Abbildung 2.9 zeigt einen solchen Sampling-Prozess. Ein Problem, das dabei auftritt, ist das Aliasing. Im Abschnitt 2.3.5 wird dieses Problem genauer erläutert. [1]

Die Funktionsweise der DFT ist ausgehend vom Sampling-Prozess einfach: Die DFT von N gesampelten Punkten ist eine Annäherung der Fourier-Transformation der ursprünglichen kontinuierlichen Funktion. Die DFT betrachtet diese gesampelten Punkte als Teil einer Funktion, und zwar genau als eine Periode dieser Funktion. Diese Tatsache führt zu einem wesentlichen Problem, das als Leakage bezeichnet wird, und wird im Abschnitt 2.3.6 näher erläutert. [1]

Durch einige Umformungen gelangt man von der Formel für die Fourier-Transformation zur Formel für die diskrete Fourier-Transformation. Diese berechnet für einen Punkt x_n von insgesamt N Punkten die Amplitude X_k der entsprechenden Frequenz f_k im Frequenzspektrum: [1]

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-2\pi i \frac{kn}{N}} \quad (8)$$

³Diskret bedeutet hier, dass die Daten nur an bestimmten Punkten existieren [1].

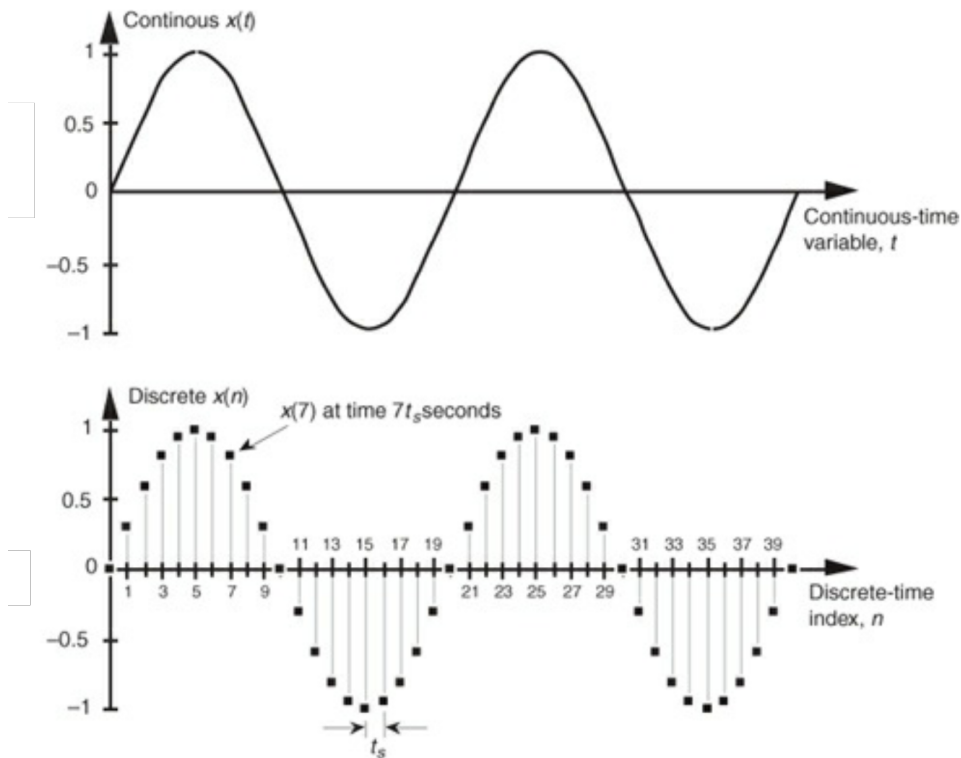


Abb. 2.9: Sampling-Prozess einer kontinuierlichen Funktion: Oben ist die kontinuierliche Funktion dargestellt, während unten die gesampelten Punkte zu sehen sind. [28]

In dieser Maturitätsarbeit wurden keine kontinuierlichen Funktionen gesampelt. Die vorliegenden Daten bestehen jedoch aus einer endlichen Anzahl diskreter Datenpunkte mit konstantem Abstand Δt . Diese Datenpunkte können daher als gesampelte Werte betrachtet werden. Aus diesem Grund kann die DFT auch auf die Klimadaten und den NAO-Index angewendet werden. Jedoch bringt die Anwendung der DFT auch Probleme mit sich, die mit ihr verknüpft sind. Bevor diese Probleme ausführlicher behandelt werden, wird zunächst das Frequenzspektrum der DFT thematisiert.

2.3.4 Frequenzspektrum

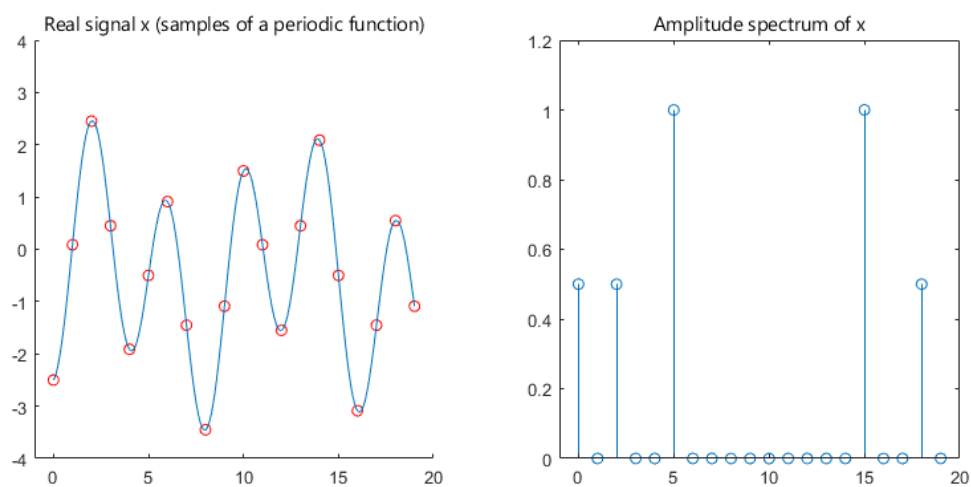


Abb. 2.10: DFT von gesampelten Punkten: Links ist die ursprüngliche Funktion mit den gesampelten Punkten dargestellt, rechts ist das Frequenzspektrum dieser Punkte zu sehen. [29]

Abbildung 2.10 zeigt das mit der DFT berechnete Frequenzspektrum von gesampelten Punkten. Gemäss Formel 8 berechnet die DFT für die Datenpunkte x_n die entsprechenden Frequenzen f_k mit den zugehörigen Amplituden X_k . Anders als bei der Fourier-Transformation gibt es bei der DFT daher nur eine begrenzte Anzahl von Frequenzen, was in Abbildung 2.10 verdeutlicht wird. [1]

Im Allgemeinen zeigt die x-Achse die Frequenzen von 0 bis N an. Diese entsprechen der Nullfrequenz f_0 (mit dem Nullpeak), den Frequenzen $f_1, f_2, \dots$ bis zur Nyquist-Frequenz f_{nyq} (der halben Sampling-Frequenz f_s) und den negativen Frequenzen bis zu f_{-1} ⁴. Was die Nyquist-Frequenz f_{nyq} ist, wird im folgenden Abschnitt genauer erläutert. Diese positiven und negativen Frequenzen existierten schon bei der Fourier-Transformation, hier sind diese jedoch in einer einzigen Reihenfolge angeordnet, anstatt symmetrisch um die y-Achse verteilt zu sein. Die Symmetrie zwischen f_k und f_{-k} bleibt erhalten, was in Abbildung 2.10 ersichtlich ist. [1]

Die Interpretation der Abbildung 2.10 kann herausfordernd sein, da die Nummerierung der Frequenzen von 0 bis N nicht die tatsächlichen Frequenzwerte widerspiegelt. Der eigentliche Wert der Frequenzen $f_{\pm k}$ lässt sich mit $f_s * \frac{\pm k}{N}$ berechnen, wobei f_s die Sampling-Frequenz, N die Datenlänge und k der Index von 0 bis $\frac{N}{2}$ ist. [1]

Um die Interpretation des Frequenzspektrums zu vereinfachen, wird fortan der eigentliche Frequenzwert der Frequenzen verwendet. Auf die Nummerierung von 0 bis N bzw. die Verwendung der Indizes $f_0, f_1, f_2, \dots$ wird verzichtet. Um die Interpretation weiter zu erleichtern, wird zudem aufgrund der Symmetrie zwischen f_k und f_{-k} nur noch die Hälfte des Frequenzspektrums betrachtet. Beide Hälften liefern die gleichen Informationen, weshalb die doppelte Darstellung überflüssig ist. [1]

Damit Frequenzspektren verschiedener Datensätze vergleichbar sind, muss das Spektrum normiert werden. Wie aus der Formel 8 hervorgeht, nimmt die Amplitude X_k einer Frequenz mit einer grösseren Datenlänge N zu. Um verzerrte Amplituden zu vermeiden, muss für die DFT ein normierender Faktor von üblicherweise $\frac{1}{N}$ verwendet werden, wobei N die Datenlänge ist. [1]

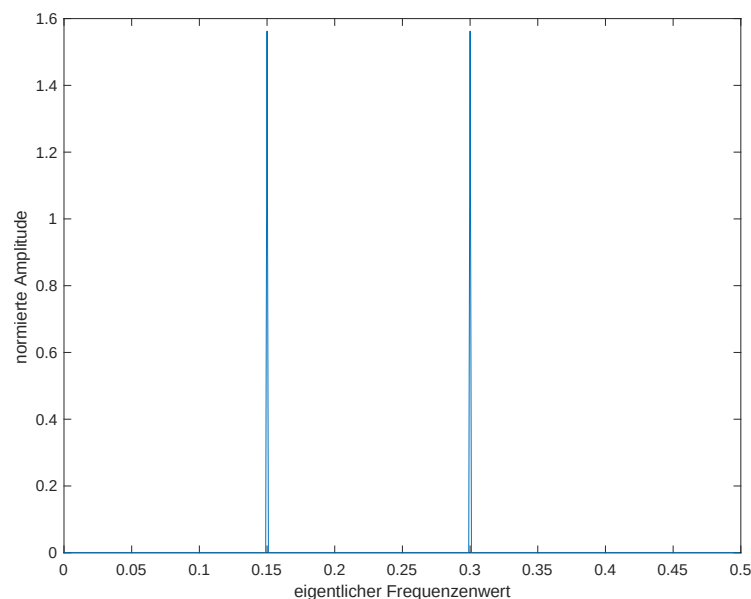


Abb. 2.11: Vereinfachtes Frequenzspektrum der DFT von Daten, welche mit der Sampling-Frequenz $f_s = 1$ gesampelt wurden. (eigene Darstellung)

⁴Sollte N ungerade sein, tritt f_{nyq} nicht auf, und die negativen Frequenzen beginnen nach der letzten positiven Frequenz vor f_{nyq} [1].

Im weiteren Verlauf werden die Frequenzspektren wie in Abbildung 2.11 dargestellt, welche die drei oben genannten Punkte für ein vereinfachtes Frequenzspektrum berücksichtigt.

2.3.5 Aliasing

Wie bereits erläutert, muss für die DFT eine kontinuierliche Funktion mit einer Sampling-Frequenz von f_s gesampelt werden. Enthält diese Funktion jedoch eine zu hohe Frequenz im Vergleich zur Sampling-Frequenz f_s , tritt Aliasing auf. Das Nyquist-Shannon-Sampling-Theorem besagt, dass die maximal darstellbare Frequenz, bei der kein Aliasing auftritt, die Nyquist-Frequenz $f_{nyq} = \frac{f_s}{2}$ ist. Diese entspricht genau der halben Sampling-Frequenz f_s . [1]

Abbildung 2.12 zeigt den Sampling-Prozess einer Funktion mit einer Frequenz f , die oberhalb der Nyquist-Frequenz f_{nyq} liegt. Die DFT, als Approximation der Fourier-Transformation, interpretiert die gesampelten Punkte als Teil einer niedrigeren Frequenz (rote Linie in Abbildung 2.12). Dadurch entsteht ein verzerrtes Frequenzspektrum, in dem die ursprüngliche Frequenz $f > f_{nyq}$ fälschlicherweise auf eine niedrigere Frequenz, der Alias-Frequenz $f_{alias} = f_{nyq} - (f - f_{nyq})$, abgebildet wird. Dieses Phänomen wird als Aliasing bezeichnet. [1]

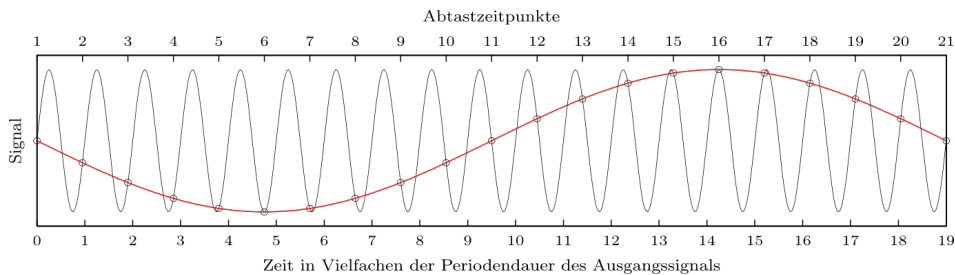


Abb. 2.12: Sampling-Prozess einer Funktion mit einer Frequenz f höher als f_{nyq} . [30]

Um Aliasing zu minimieren, können Anti-Aliasing-Filter verwendet werden [6]. Bevor eine Funktion mit einer Sampling-Frequenz f_s gesampelt wird, kann ein Anti-Aliasing-Filter Frequenzen oberhalb der Nyquist-Frequenz f_{nyq} unterdrücken [6]. Da Klimadaten jedoch bereits als gesampelte Punkte vorliegen und der «Sampling-Prozess» bereits durchgeführt wurde, kann der Anti-Aliasing-Filter nicht mehr eingesetzt werden. Somit lassen sich Alias-Frequenzen nicht minimieren. Die Auswirkungen dieses Umstands werden im Kapitel «Diskussion» näher erörtert.

2.3.6 Leakage

Wie bereits erwähnt, betrachtet die DFT die Datenpunkte als Teil einer kontinuierlichen Funktion, und zwar als eine einzelne Periode dieser Funktion. Wenn die Datenpunkte jedoch über ihre gesamte Länge N keine vollständige Periode abdecken, tritt ein Problem auf. In solchen Fällen entsteht Leakage, bei dem im Frequenzspektrum Amplituden erscheinen, die in den tatsächlichen Daten nicht vorhanden sind. Abbildung 2.13 zeigt ein Beispiel für ein solches verzerrtes Frequenzspektrum. [1][31]

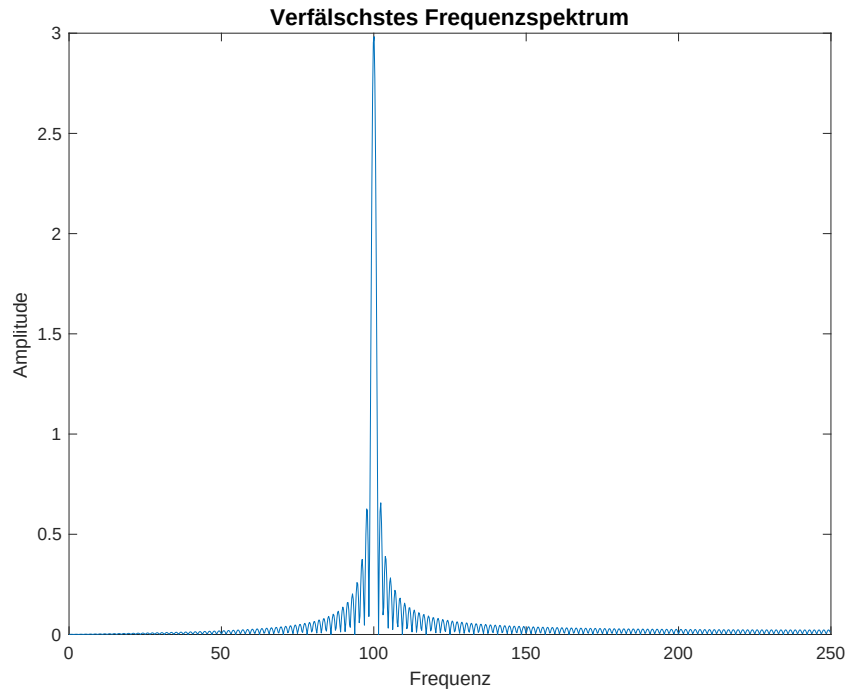


Abb. 2.13: Verzerres Frequenzspektrum aufgrund von Leakage. (eigene Darstellung)

Leakage lässt sich jedoch reduzieren: Mit der Anwendung eines Tapers, also einer Fensterfunktion, welche die Daten am Anfang und Ende glättet, kann die Verzerrung des Frequenzspektrums massgeblich reduziert werden [31]. Zu den am häufigsten verwendeten Fensterfunktionen gehören das Hann-Window und das Hamming-Window [1]. Abbildung 2.14 zeigt diese beiden Fensterfunktionen über die Länge N . Abbildung 2.15 zeigt das bereinigte Frequenzspektrum der gleichen Daten wie in Abbildung 2.13, bei denen zuvor ein Taper angewendet wurde.

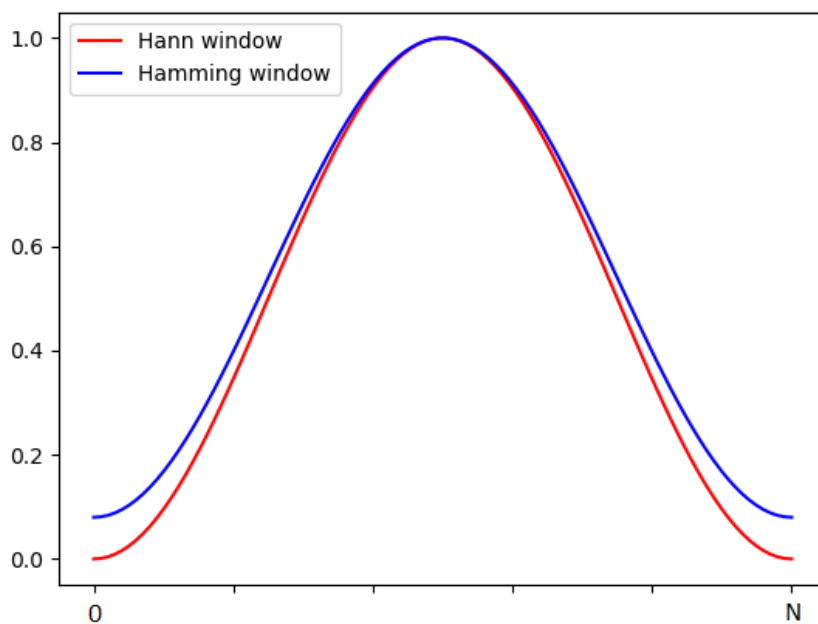


Abb. 2.14: Hann-Window und Hamming-Window im Vergleich. [32]

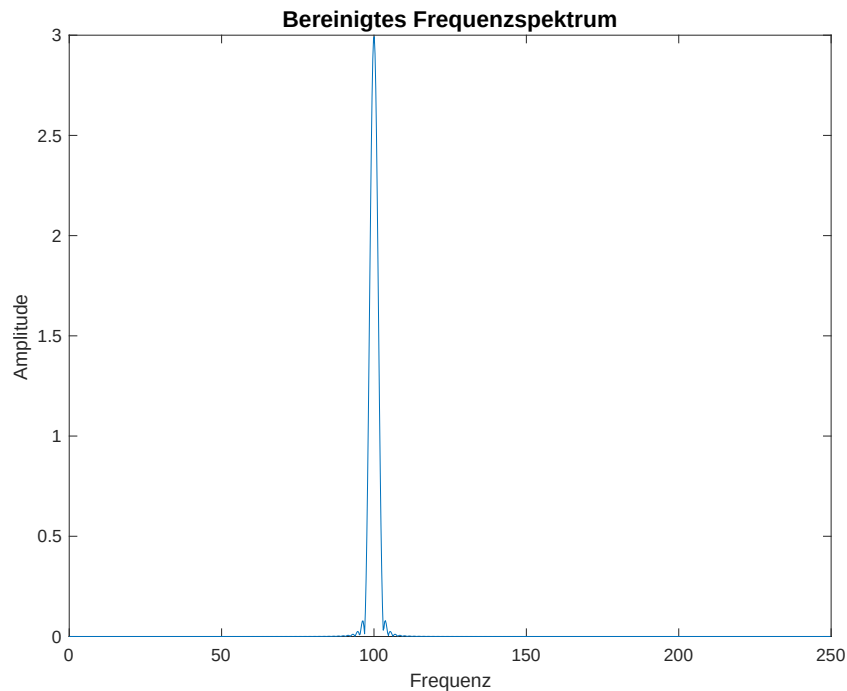


Abb. 2.15: Bereinigtes Frequenzspektrum durch ein Hann-Window. (eigene Darstellung)

2.3.7 Trends

Die Klimadaten sind, wie in den Abbildungen B.1 bis B.8 im Anhang ersichtlich wird, von Trends betroffen. Diese können unterschiedlich stark ausgeprägt sein, jedoch führt jeder Trend in der DFT zu einer Verzerrung des Frequenzspektrums. Sie können als sehr niedrige Frequenzen betrachtet werden, die unter der Grundfrequenz f_1 liegen. Diese sehr niedrigen Frequenzen lassen sich im Frequenzspektrum nicht korrekt darstellen und werden daher auf die niedrigsten Frequenzen im Spektrum abgebildet. Dieser Effekt ähnelt dem „Aliasing“, da auch hier Frequenzen vorhanden sind, die im Frequenzspektrum nicht korrekt dargestellt werden können. Abbildung 2.16 zeigt das verzerrte Frequenzspektrum der DFT von Daten, die einen Trend enthalten. [1]

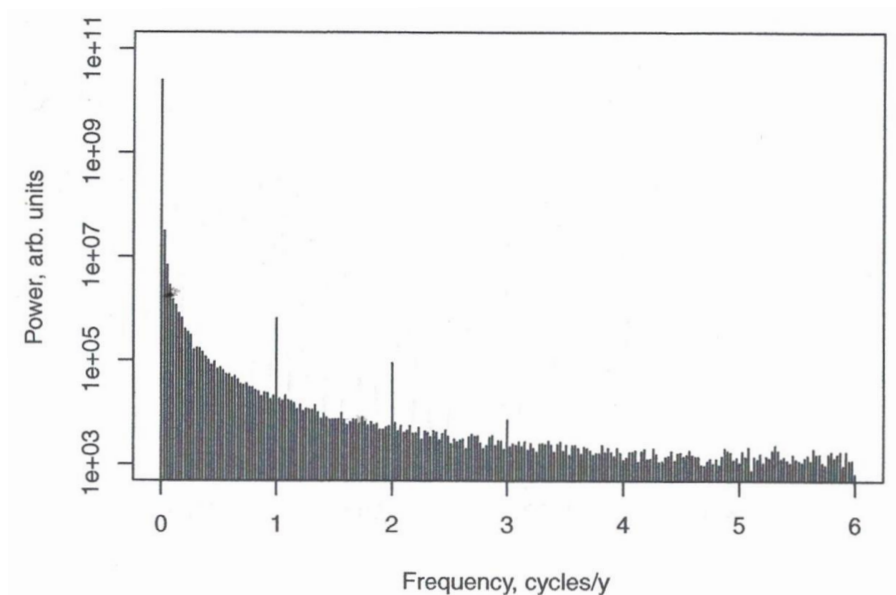


Abb. 2.16: DFT von Daten mit Trends. [1]

Durch das Detrenden, d.h. der Entfernung des Trends mit geeigneten Funktionen (siehe Abschnitt 2.6.1), wird dieses Problem minimiert [1]. Abbildung 2.17 zeigt das bereinigte Frequenzspektrum der DFT derselben Daten aus Abbildung 2.16, wobei der Trend zuvor entfernt wurde.

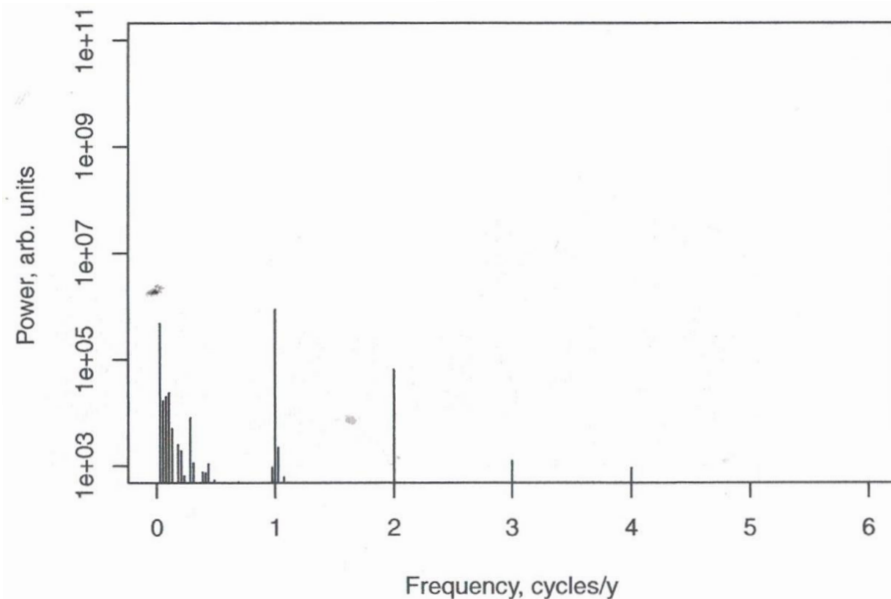


Abb. 2.17: DFT von Daten, bei denen der Trend entfernt wurde. [1]

2.4 Signifikanztest

Um die Signifikanz der Amplituden im Frequenzspektrum zu bestimmen, müssen zunächst die Nullhypothese H_0 sowie die Alternativhypothese H_1 formuliert werden.

Die Nullhypothese H_0 besagt, dass die Amplituden im Frequenzspektrum durch zufälliges Rauschen entstanden sind. Sollte diese Nullhypothese H_0 nun verworfen werden, wird die Alternativhypothese H_1 angenommen: Die Alternativhypothese H_1 geht davon aus, dass die Amplituden durch klimatologische Prozesse und nicht durch Zufall verursacht wurden. Zur Verwerfung bzw. Bestätigung der Nullhypothese wird ein Nullmodell als Referenzmassstab erstellt, welches auf Red Noise basiert [7].

Red Noise ist eine Form des Rauschens, bei der die Power im Power-Spektrum⁵ umgekehrt proportional zur Frequenz ist. Das bedeutet, dass niedrige Frequenzen im Spektrum grössere Amplituden aufweisen, während höhere Frequenzen durch kleinere Amplituden repräsentiert werden. Für klimatologische Daten basiert das geeignetste Nullmodell auf Red Noise. [1][7]

Um den Signifikanztest durchzuführen, werden zuerst zahlreiche Red-Noise-Simulationen durchgeführt. Um aus diesen Simulationen das Nullmodell zu erstellen, müssen die Power-Spektren gebildet werden. Aus diesem Nullmodell wird ein Konfidenzintervall abgeleitet – hier das 95%-Konfidenzintervall. Überschreiten die Amplituden in den Daten dieses 95%-Konfidenzintervall, sind diese Werte mit einer Sicherheit von 95% signifikant. In diesem Fall wird die Nullhypothese H_0 verworfen und die Alternativhypothese H_1 angenommen, was darauf hinweist, dass die Amplituden durch klimatologische Prozesse und nicht durch Rauschen verursacht wurden. [1][7]

⁵Die Power entspricht dem Quadrat der Amplitude, während das Power-Spektrum das quadrierte Frequenzspektrum darstellt [1].

2.5 MATLAB

MATLAB ist ein vektorbasiertes Programm, das sich ideal für numerische Berechnungen und die Erstellung von Programmen eignet [8]. Für den praktischen Teil dieser Maturitätsarbeit ist MATLAB besonders geeignet, da es Toolboxen für viele verschiedene Bereiche bietet [9]. Für die Fourier-Analyse wird die Signal Processing Toolbox benötigt, die Funktionen zur Datenvorverarbeitung und Analyse von Signalen enthält [9]. Im Folgenden werden die verwendeten Funktionen vorgestellt.

- `fft(X, n)` berechnet die DFT der Einträge in X mit einem FFT-Algorithmus. n gibt die Anzahl der Punkte an, auf die die Transformation berechnet wird [33].
- `hamming(X)` erzeugt ein Hamming-Window der Länge X [34].
- `hann(X)` erzeugt ein Hann-Window der Länge X [35].
- `detrend(X)` entfernt den linearen Trend der Einträge in X [36].
- `smoothdata(X)` glättet die Einträge in X [37].
- `movmean(X, n)` berechnet das gleitende Mittel über jeweils n benachbarte Einträge in X [38].

2.6 Vorgehensweise

Bevor im nächsten Kapitel die Resultate dieser Maturitätsarbeit präsentiert werden, wird in diesem Abschnitt die Vorgehensweise dargelegt. Es wird aufgezeigt, wie die Temperatur- und Niederschlagsdaten sowie der NAO-Index vorverarbeitet wurden, um möglichst unverzerrte Frequenzspektren zu erhalten. Anschliessend wird beschrieben, wie die Fourier-Analyse auf die vorverarbeiteten Daten angewendet wurde. Im weiteren Verlauf wird die Visualisierung der Resultate vorgestellt. Anschliessend wird die Implementierung der Signifikanztests kurz umrissen. Diese Schritte werden durch Abschnitte aus dem Originalcode ergänzt, um die Nachvollziehbarkeit zu erleichtern. Der vollständige Code ist im Anhang zu finden. Zum Abschluss wird erläutert, nach welchen Kriterien die Frequenzspektren in dieser Arbeit interpretiert werden.

2.6.1 Datenvorverarbeitung

Bevor mit der Datenvorverarbeitung begonnen wurde, mussten die Daten ins richtige Format gebracht werden. MATLAB ist ein vektorbasiertes Programm [8], deshalb mussten die zu verarbeitenden Daten in eine Matrix umgewandelt werden. Daraufhin wurden die Daten in Jahreszeiten unterteilt und gemittelt. Der folgende Code zeigt, wie diese Schritte umgesetzt wurden:

```
temp_matrix = reshape(temp_fuersaison, 12, jahre_fuersaison) %
    Temperatur-Matrix erstellen
temp = mean(temp_matrix(9:11, :), 1) % Die gesuchten Monate einsetzen,
    z.B. 9:11 fuer September bis November
```

Als Nächstes wurde der Mittelwert entfernt, damit der Nullpeak deutlich kleiner ausfällt⁶. Der folgende Code zeigt, wie dies implementiert wurde:

```
temp_ohne_mean = temp - mean(temp) % Mittelwert entfernen
```

Um die Verzerrung im Frequenzspektrum aufgrund von Trends zu minimieren, wurde ein Detrend auf die Daten angewendet [1]. Im Rahmen dieser Maturitätsarbeit wurden dazu verschiedene Methoden, wie z.B. `movmean()` und `smoothdata()`, getestet. Die Funktion `detrend()` erwies sich jedoch als

⁶Ganz entfernen liess sich der Nullpeak nicht, da später noch der Taper angewendet wurde. Eine Mittelwertentfernung nach der Anwendung des Tapers würde dessen Wirkung aufheben.

am besten geeignet. Der folgende Code zeigt die Implementierung des Detrends mit der Funktion `detrend()`:

```
temp_detrend = detrend(temp_ohne_mean) % Trend aus den Daten entfernen
```

Um das Leakage im Frequenzspektrum zu reduzieren, wurde ein Taper angewendet [31]. In dieser Maturitätsarbeit kam ein Hamming-Window zum Einsatz, da dieses die besten Resultate erzielte. Der folgende Code zeigt, wie dieser Taper auf die Daten angewendet wurde:

```
Window_temp = hamming(N_t)' .* N_t / sum(hann(N_t)) % Window mit
    Skalierung fuer Energieerhalt
temp_window = temp_detrend .* Window_temp(1, 1:N_t) % Anwendung des
    Windows auf die Daten
```

2.6.2 Fourier-Analyse

Nach der Vorverarbeitung erfolgte die eigentliche Fourier-Analyse. Dazu wurde im ersten Schritt die FFT mit integriertem Zero-Padding⁷ auf die Daten angewendet. Der folgende Code zeigt, wie dies erfolgte:

```
temp_fft = fft(temp_window, N_t2)
```

Die FFT allein genügt nicht, um ein interpretationsfähiges Resultat zu erhalten. Wie in Kapitel 2.3.4 beschrieben wurde, sind dafür zusätzliche Anpassungen notwendig. Namentlich mussten die Amplituden normiert, die x-Achse mit den richtigen Frequenzwerten beschriftet und nur das halbe Frequenzspektrum dargestellt werden. Der folgende Code zeigt, wie diese Anpassungen vorgenommen wurden:

```
temp_oneSide = abs(temp_fft(1:N_t2/2)) * (1/(N_t2/2)) % Normierung und
    Extraktion vom halben Spektrum
freq_temp = (1:N_t2/2)/(N_t2) % Erstellung der korrekten Frequenzwerte
```

Als Letztes wurden die Frequenzspektren untereinander verglichen. Um dies möglichst genau durchzuführen, mussten die Frequenzspektren skaliert werden. Der folgende Code zeigt, wie diese Skalierung realisiert wurde:

```
nao_vergleichsfaktor = sum(temp_oneSide) ./ sum(nao_oneSide) % Faktor
    fuer die Skalierung erstellen
nao_oneSide_neu = nao_oneSide * nao_vergleichsfaktor % Skalierung des
    Frequenzspektrums mit dem obigen Faktor
```

2.6.3 Signifikanztest

Die erhaltenen Resultate mussten auf ihre Signifikanz überprüft werden. Wie im Kapitel 2.4 erläutert wurde, muss dazu ein Nullmodell erstellt werden. Das beste Nullmodell für klimatologische Daten basiert auf Red Noise [7]. Dieses Red Noise wurde nicht selbst programmiert, sondern aus einer externen Datei übernommen [39]. Insgesamt wurden 1000 Red-Noise-Simulationen durchgeführt und deren

⁷Mit dem Zero-Padding ist das Hinzufügen von Nullen am Ende des Datensatzes gemeint. Dieses Zero-Padding stammt aus früheren Zeiten, als die FFT-Algorithmen bei Datenlängen von 2^n am effizientesten arbeiteten. Heute sind die Algorithmen deutlich verbessert, und das Zero-Padding ist nicht mehr zwingend nötig. Ein Grund, weshalb es hier noch angewendet wird, liegt in der Darstellung eines glatteren Spektrums: Mehr Datenpunkte entsprechen mehr Frequenzkomponenten, was die Rauigkeit reduziert. Wichtig ist hier anzumerken, dass durch das Zero-Padding keine genaueren Informationen gewonnen werden können. [1]

Power-Spektren berechnet. Diese wurden zudem mit einem Faktor multipliziert, sodass die Power-Spektren der Daten und der Red-Noise-Simulationen die gleiche Energie aufweisen. Aus diesen skalierten Power-Spektren der Simulationen wurde das 95%-Konfidenzintervall berechnet. Der folgende Code zeigt, wie die Signifikanztests durchgeführt wurden:

```
% Nullmodell erstellen
iterationen = 1000; % Anzahl der Simulationen fuer das Modell
null_modell_temp = zeros(iterationen, N_t2/2);

for i = 1:iterationen
    rauschen_temp = rednoise(1, N_t2) % Simulation des Red Noise,
    % Funktion rednoise() in anderem File
    rauschen_fft_temp = fft(rauschen_temp)
    power_spektrum_rauschen_temp = abs(rauschen_fft_temp).^2 / N_t2
    % Power-Spektrum des Red Noise erstellen
    vergleichsfaktor_power_temp = sum(power_spektrum_temp) ./ sum(
        power_spektrum_rauschen_temp) % Faktor zur Anpassung an
    % dasselbe Energieniveau
    power_spektrum_rauschen_temp = vergleichsfaktor_power_temp .*
    power_spektrum_rauschen_temp % Multiplikation mit dem obigen
    % Faktor
    null_modell_temp(i, :) = power_spektrum_rauschen_temp(1:N_t2/2)
end

% Berechnung des 95%-Konfidenzintervall
Konfidenzintervall_95_temp = prctile(modell_temp, 95)
```

Wenn nun das 95%-Konfidenzintervall zusammen mit dem Power-Spektrum der Daten dargestellt wird, sind alle Amplituden im Power-Spektrum statistisch signifikant, welche das 95%-Konfidenzintervall überschreiten.

2.6.4 Visualisierung

Die Darstellung der Frequenz- und Power-Spektren in MATLAB ist einfach: Mit `plot()` sowie der Beschriftung der Achsen und des Titels wurden die Resultate ansprechend dargestellt. Falls erforderlich, wurden Achsenbegrenzungen gesetzt. Wurden mehrere Ergebnisse in einer Abbildung dargestellt, so wurde stets eine Legende hinzugefügt. Der folgende Code zeigt beispielhaft, wie die Resultate visualisiert wurden:

```
figure;
plot(freq_temp,abs(temp_oneSide))
xlabel('Frequenz/Zyklen pro Jahr') % Beschriftung der x-Achse
ylabel('Amplitude') % Beschriftung der y-Achse
title('Frequenzspektren der Temperaturdaten und des NAO-Index im
    Winter (Monate DJF)','FontSize', 13) % Titel der Abbildung
xlim([0,0.5]) % Begrenzung der x-Achse
ylim([0,0.275]) % Begrenzung der y-Achse

hold on
plot(freq_ao,(ao_vergleichsfaktor .* abs(ao_oneSide)),'-r')
hold off
```

```
legend('Temperaturdaten','NAO-Index') % Legende erstellen
```

2.6.5 Interpretation des Frequenzspektrums

Die in den Resultaten gezeigten Frequenzspektren sind komplexer strukturiert als diejenigen, welche zuvor dargestellt wurden. Für eine präzise Interpretation und zur Wahrung des Überblicks werden die Resultate anhand der folgenden Grundsätze analysiert:

- Die Peaks in den Frequenzspektren widerspiegeln Zyklen in den Temperatur- und Niederschlagsdaten sowie im NAO-Index.
- Die Höhe der Peaks gibt Aufschluss über die Stärke der jeweiligen Zyklen. Grössere Peaks deuten auf stärkere Zyklen hin, da sie die Daten im mathematischen Sinne stärker prägen als kleinere Peaks⁸.
- Nicht-signifikante Peaks werden bei der Interpretation konsequent ignoriert.
- Die Periodenlängen der Zyklen können nicht-ganzzahlige Werte annehmen; dies liegt an der mathematischen Natur der Fourier-Analyse und sollte als eine natürliche Folge dieser Methode betrachtet werden.
- Es ist entscheidend, die Peaks nicht unkritisch als reale Zyklen zu interpretieren. Durch die Limitationen der Methode (siehe Kapitel 4.1) können Peaks verzerrt bzw. verursacht werden, die keine in den Daten vorhandenen Zyklen repräsentieren. Somit soll die Interpretation mit Vorsicht genossen werden.

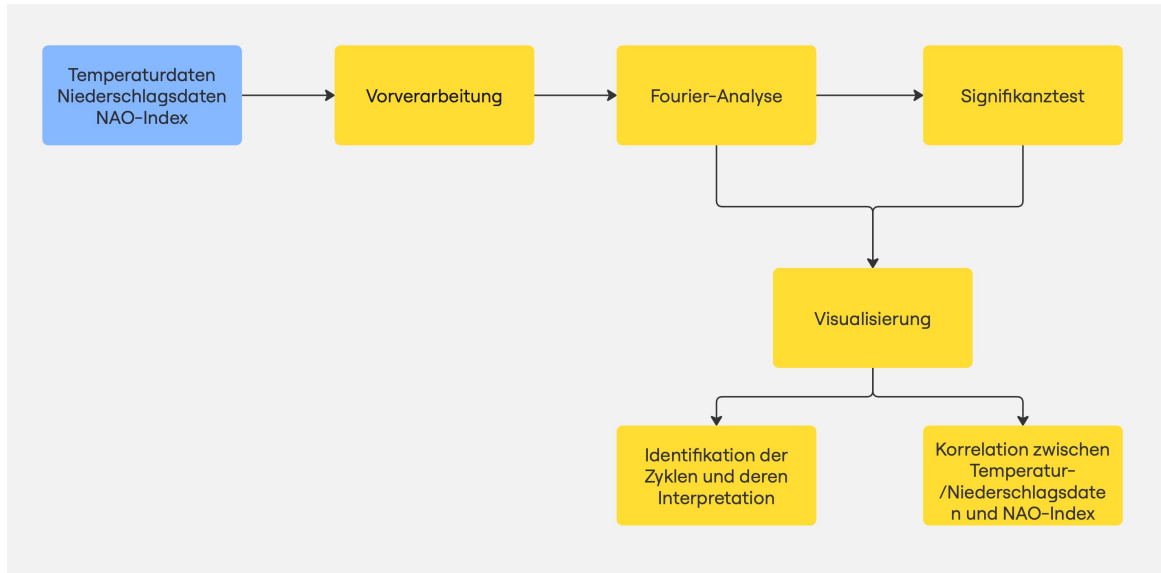


Abb. 2.18: Flussdiagramm der Vorgehensweise. (eigene Abbildung)

Abbildung 2.18 fasst die Vorgehensweise und die anschliessende Diskussion in einem Flussdiagramm zusammen. Nach der ausführlichen Erläuterung der Vorgehensweise folgt nun die Präsentation der Resultate.

⁸Ein grösserer Peak entspricht einer Frequenz mit einer grösseren Amplitude, was einer stärkeren Repräsentation dieser Frequenz in den originalen Daten entspricht [1].

3 Resultate

In diesem Kapitel werden die Resultate der Fourier-Analyse der Temperatur- und Niederschlagsdaten sowie des NAO-Index vorgestellt und detailliert beschrieben. Anschliessend werden die Frequenzspektren der Klimadaten und des NAO-Index qualitativ verglichen. Alle Grafiken basieren auf eigenen Berechnungen und wurden selbst erstellt. Die in diesem Kapitel präsentierten Resultate bilden die Grundlage für die anschliessende Diskussion, in der die Zyklen der Temperatur- und Niederschlagsdaten sowie des NAO-Index identifiziert werden. Darauf aufbauend wird der Einfluss der NAO auf die Klimadaten anhand des hier dargestellten Vergleichs analysiert.

3.1 Temperaturdaten

In diesem Abschnitt wird die Fourier-Analyse der Temperaturdaten präsentiert. Die Resultate umfassen die Frequenzspektren der einzelnen Jahreszeiten. Abschliessend werden die Signifikanztests der Frequenzspektren dargestellt, um die Relevanz der einzelnen Peaks zu überprüfen. Im Anhang sind zudem die visualisierten Rohdaten zu finden, die einen Überblick über die analysierten Temperaturdaten bieten.

3.1.1 Frequenzspektren

Die x-Achse der Frequenzspektren ist mit Werten von 0 bis 0.5 Zyklen pro Jahr beschriftet. Die y-Achse zeigt die Amplitude an, welche die Stärke der jeweiligen Frequenzkomponente angibt. Im Folgenden werden ausschliesslich die Peaks beschrieben, die Identifikation der Zyklen erfolgt ausführlich im nächsten Kapitel.

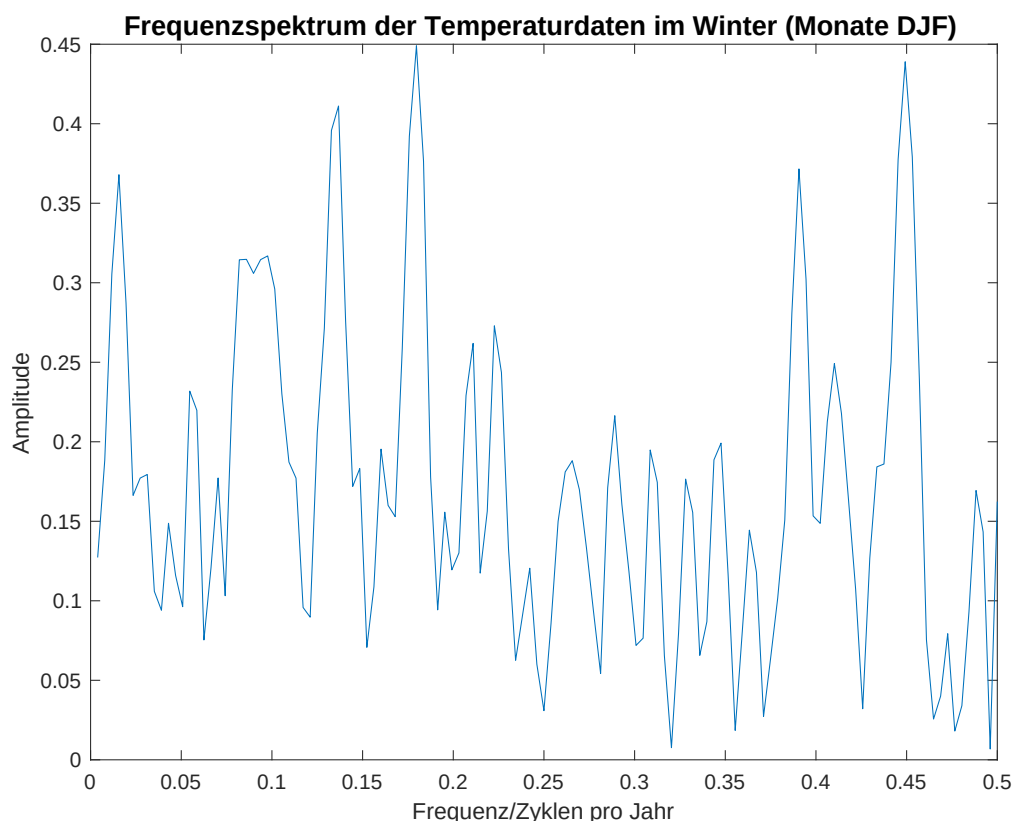


Abb. 3.1: Frequenzspektrum der Temperaturdaten im Winter (Monate Dezember, Januar, Februar).

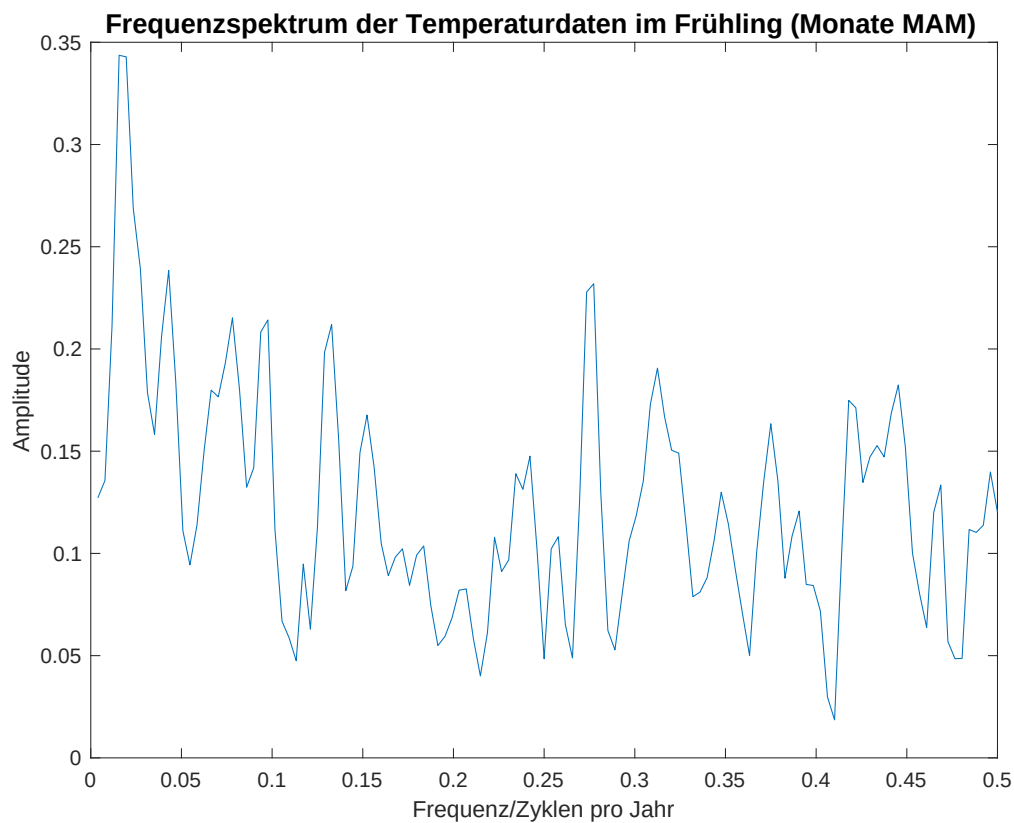


Abb. 3.2: Frequenzspektrum der Temperaturdaten im Frühling (Monate März, April, Mai).

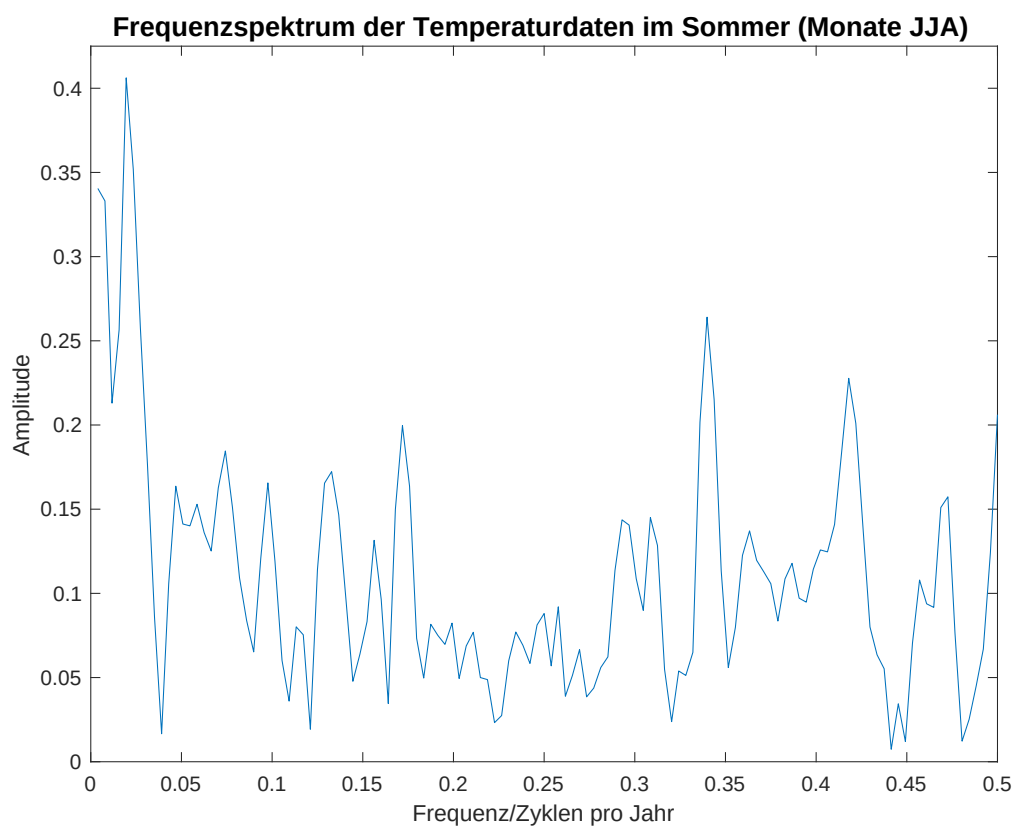


Abb. 3.3: Frequenzspektrum der Temperaturdaten im Sommer (Monate Juni, Juli, August).

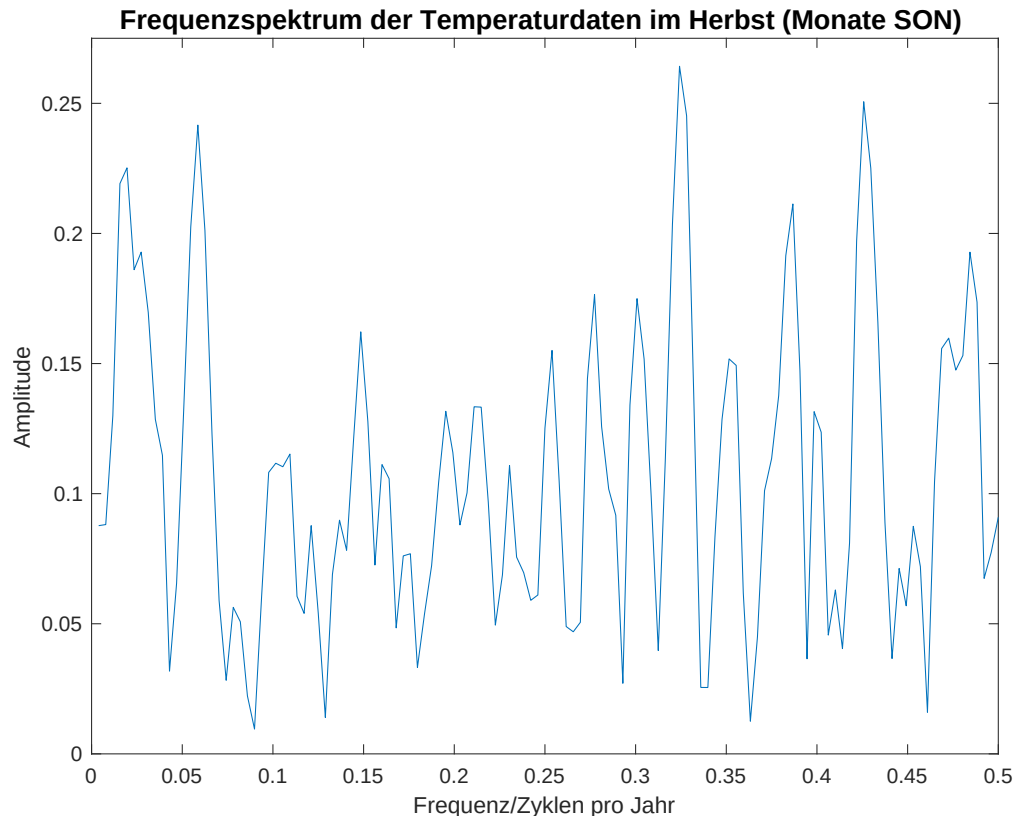


Abb. 3.4: Frequenzspektrum der Temperaturdaten im Herbst (Monate September, Oktober, November).

Winter Abbildung 3.1 zeigt das Frequenzspektrum der Temperaturdaten im Winter (Monate Dezember, Januar und Februar). Über das gesamte Spektrum hinweg sind verschiedene Peaks zu erkennen, wobei einige besonders stark ausgeprägt sind: Der erste markante Peak tritt im niedrigen Frequenzbereich bei 0.02 Zyklen pro Jahr auf, gefolgt von einem weiteren grösseren Peak bei 0.09 Zyklen pro Jahr. Im mittleren Frequenzbereich sind zwei dominante Peaks bei 0.13 und 0.18 Zyklen pro Jahr zu finden. Danach erscheinen im mittleren Frequenzbereich nur noch kleinere Peaks, bis im Hochfrequenzbereich bei 0.39 und 0.45 Zyklen pro Jahr erneut zwei grössere Peaks auftreten.

Frühling Abbildung 3.2 zeigt das Frequenzspektrum der Temperaturdaten im Frühling (Monate März, April und Mai). Direkt zu Beginn, bei 0.02 Zyklen pro Jahr, ist der grösste Peak des gesamten Frequenzspektrums zu beobachten. Die übrigen Peaks im Spektrum sind von vergleichbarer Grösse und gleichmässig verteilt, was für den niedrigen bis zum Hochfrequenzbereich gilt. Auffallend ist jedoch eine Lücke im Bereich von 0.16 bis 0.23 Zyklen pro Jahr, wo keine Peaks von ähnlicher Grösse zu sehen sind.

Sommer Abbildung 3.3 zeigt das Frequenzspektrum der Temperaturdaten im Sommer (Monate Juni, Juli und August). Der grösste Peak befindet sich bereits zu Beginn des Frequenzspektrums bei 0.02 Zyklen pro Jahr. Bis zu 0.17 Zyklen pro Jahr folgen mehrere Peaks von vergleichbarer Amplitude. Im darauffolgenden Bereich von 0.18 bis 0.33 Zyklen pro Jahr sind keine grösseren Peaks vorhanden. Der nächste markante Peak ist im Hochfrequenzbereich bei 0.34 Zyklen pro Jahr zu finden, gefolgt von zwei weiteren auffälligen Peaks bei 0.42 und 0.5 Zyklen pro Jahr.

Herbst Abbildung 3.4 zeigt das Frequenzspektrum der Temperaturdaten im Herbst (Monate September, Oktober und November). Die meisten Peaks in diesem Spektrum sind ähnlich gross, jedoch stechen einige Ausnahmen hervor: Zwei grössere Peak im niedrigen Frequenzbereich bei 0.02 und 0.06

Zyklen pro Jahr sowie zwei markante Peaks im Hochfrequenzbereich bei 0.33 und 0.42 Zyklen pro Jahr sind stärker ausgeprägt als die übrigen Peaks. Weiter lässt sich sagen, dass mit zunehmender Frequenz die Dichte der Peaks zunimmt.

3.1.2 Signifikanztest

Nachfolgend werden die Signifikanztests der dargestellten Frequenzspektren präsentiert, um die Relevanz der Peaks zu überprüfen. Die grün markierten Frequenzen sind statistisch signifikant und entsprechen somit statistisch signifikanten Peaks. Die rote Kurve zeigt das 95%-Konfidenzintervall an, ab welchem die Peaks als statistisch signifikant bewertet werden. Die Beschriftung der x-Achse entspricht jener der Abbildungen der Frequenzspektren, jedoch gibt die y-Achse neu die Power der jeweiligen Frequenz an. Die Limitationen des Signifikanztests werden im nächsten Kapitel besprochen.

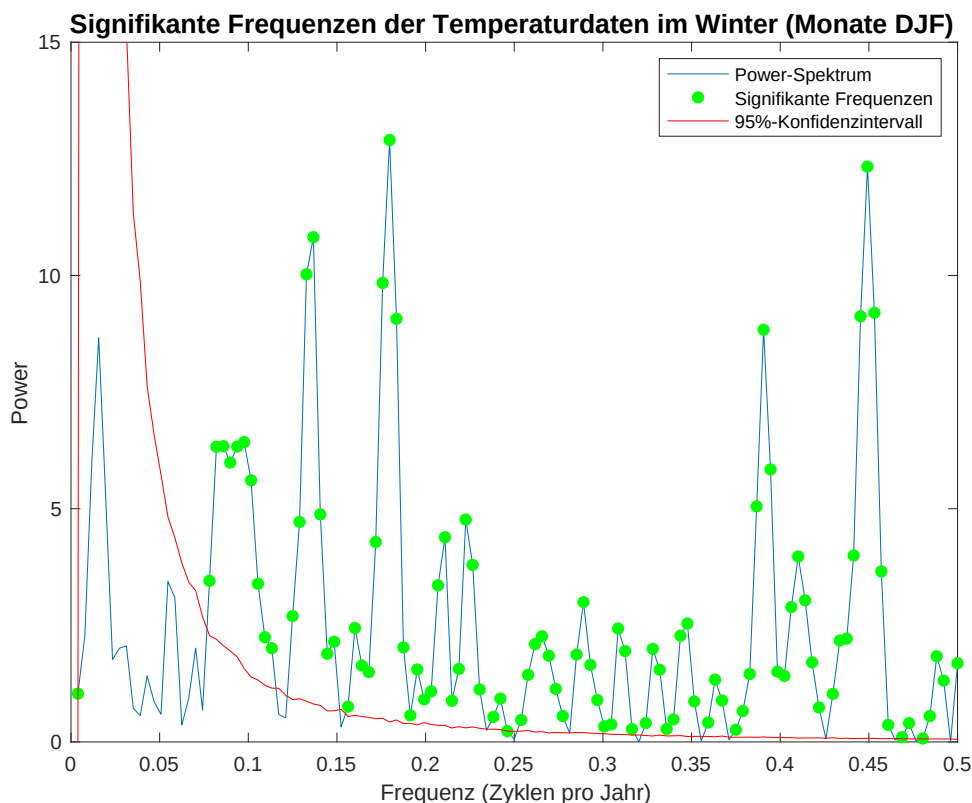


Abb. 3.5: Signifikanztest des Frequenzspektrums der Temperaturdaten im Winter (Monate Dezember, Januar, Februar).

Winter Abbildung 3.5 zeigt den Signifikanztest des Frequenzspektrums der Temperaturdaten im Winter (Monate Dezember, Januar und Februar). Ein grösserer Peak bei 0.02 Zyklen pro Jahr erweist sich als statistisch nicht signifikant. Auch ein kleinerer Peak bei 0.06 Zyklen pro Jahr zeigt keine statistische Signifikanz. Die übrigen Peaks hingegen sind signifikant.

Frühling Abbildung 3.6 zeigt den Signifikanztest des Frequenzspektrums der Temperaturdaten im Frühling (Monate März, April und Mai). Der grösste Peak bei 0.02 Zyklen pro Jahr ist statistisch nicht signifikant. Die übrigen Peaks sind hingegen statistisch signifikant.

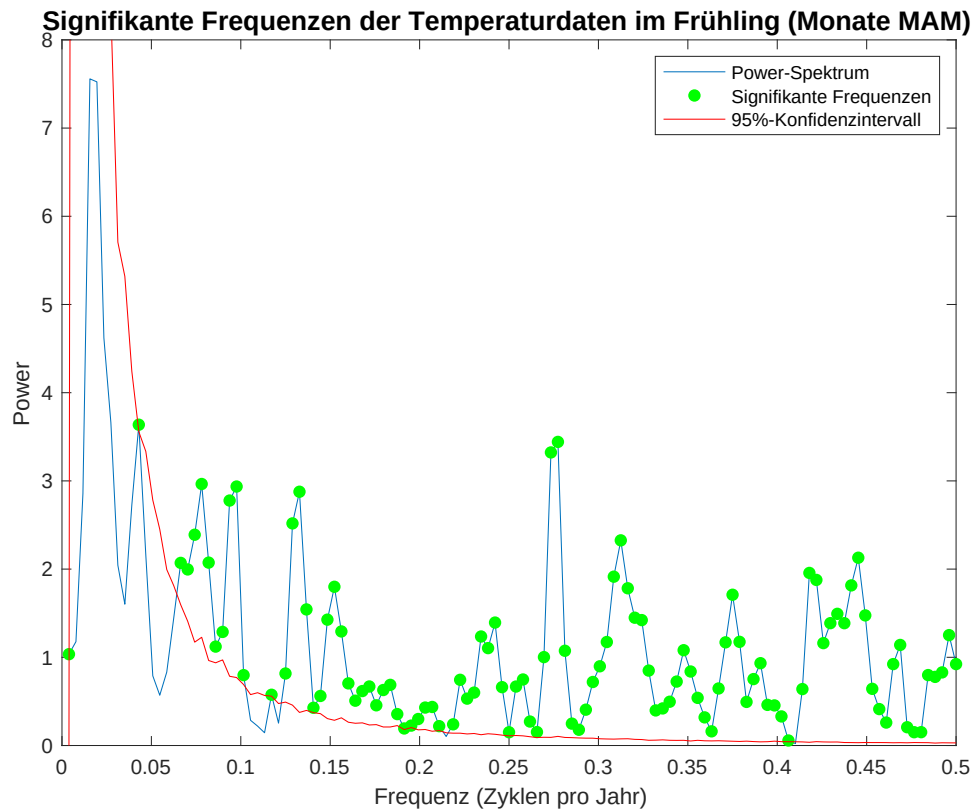


Abb. 3.6: Signifikanztest des Frequenzspektrums der Temperaturdaten im Frühling (Monate März, April, Mai).

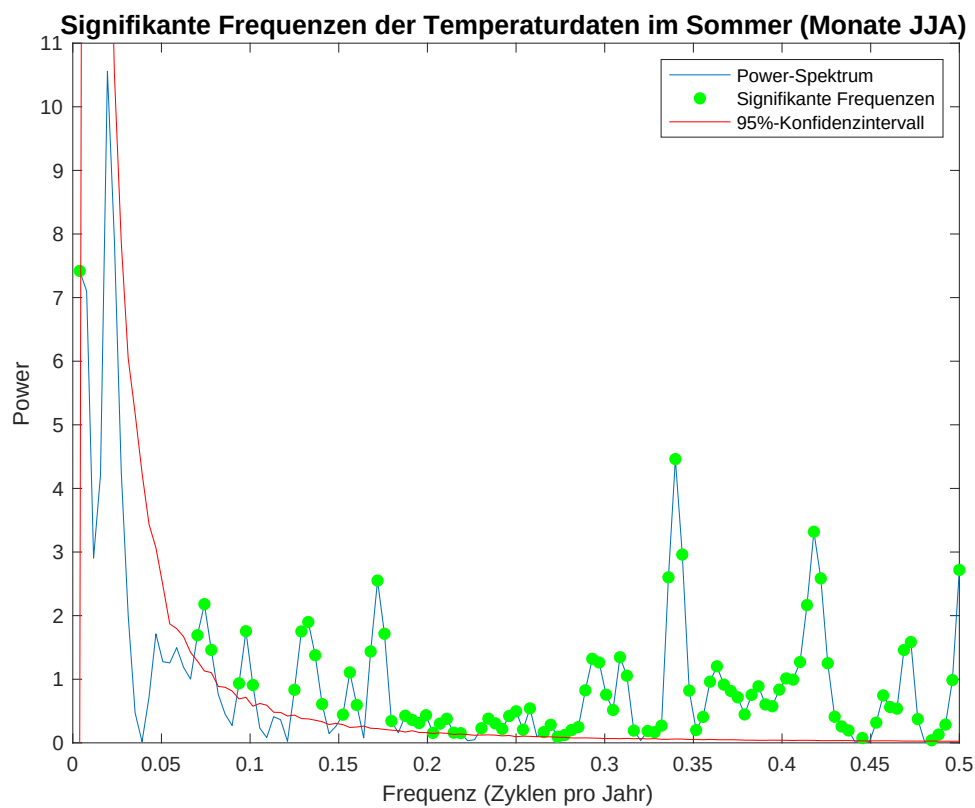


Abb. 3.7: Signifikanztest des Frequenzspektrums der Temperaturdaten im Sommer (Monate Juni, Juli, August).

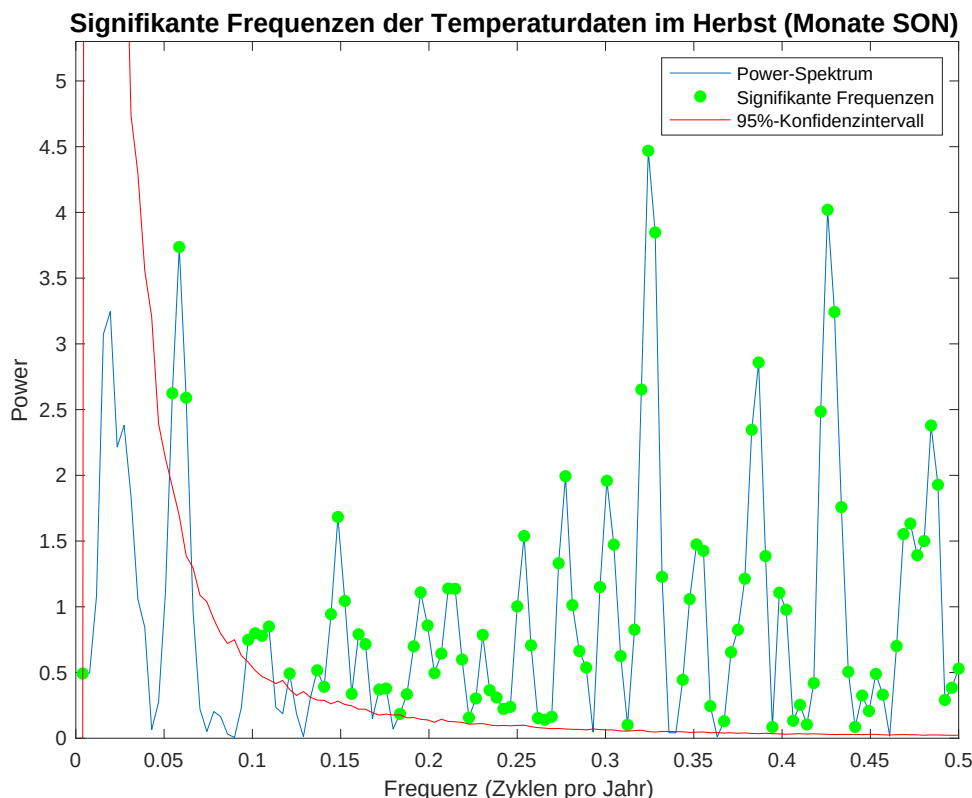


Abb. 3.8: Signifikanztest des Frequenzspektrums der Temperaturdaten im Herbst (Monate September, Oktober, November).

Sommer Abbildung 3.7 zeigt den Signifikanztest des Frequenzspektrums der Temperaturdaten im Sommer (Monate Juni, Juli und August). Der grösste Peak bei 0.02 Zyklen pro Jahr ist statistisch nicht signifikant, ebenso die darauf folgenden kleineren Peaks bis 0.07 Zyklen pro Jahr. Alle anschliessenden Peaks sind jedoch statistisch signifikant.

Herbst Abbildung 3.8 zeigt den Signifikanztest des Frequenzspektrums der Temperaturdaten im Herbst (Monate September, Oktober und November). Ein grösserer Peak bei 0.02 Zyklen pro Jahr ist statistisch nicht signifikant, während die übrigen Peaks im Spektrum statistisch signifikant sind.

3.2 Niederschlagsdaten

In diesem Abschnitt wird die Fourier-Analyse der Niederschlagsdaten präsentiert. Die Resultate umfassen die Frequenzspektren der einzelnen Jahreszeiten. Abschliessend wird der Signifikanztest der Frequenzspektren dargestellt, um die Relevanz der einzelnen Peaks zu überprüfen. Im Anhang sind zudem die visualisierten Rohdaten zu finden, die einen Überblick über die analysierten Niederschlagsdaten bieten.

3.2.1 Frequenzspektren

Die Frequenzspektren der Niederschlagsdaten werden auf die gleiche Weise wie die der Temperaturdaten dargestellt. Die x-Achse ist, wie bereits zuvor, mit Werten von 0 bis 0.5 Zyklen pro Jahr beschriftet. Die y-Achse zeigt wie gewohnt die Amplitude der jeweiligen Frequenzen an. Im Folgenden werden, wie auch bei den Temperaturdaten, nur die Peaks beschrieben. Auf die Identifikation der Zyklen wird im nächsten Kapitel näher eingegangen.

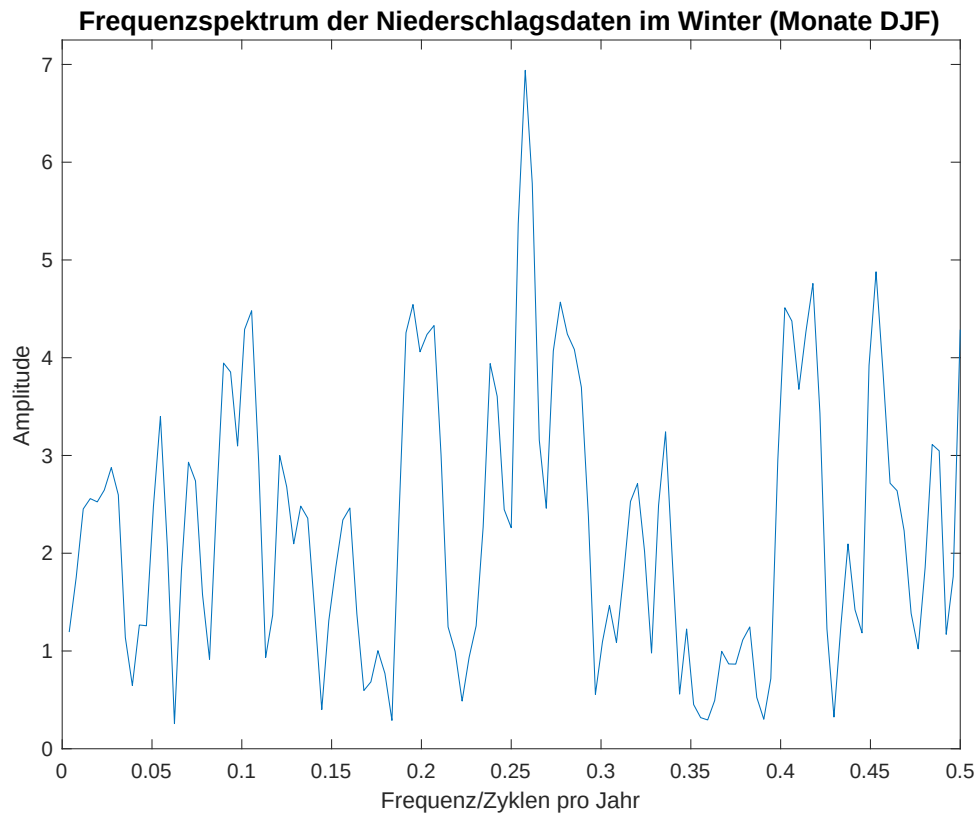


Abb. 3.9: Frequenzspektrum der Niederschlagsdaten im Winter (Monate Dezember, Januar, Februar).

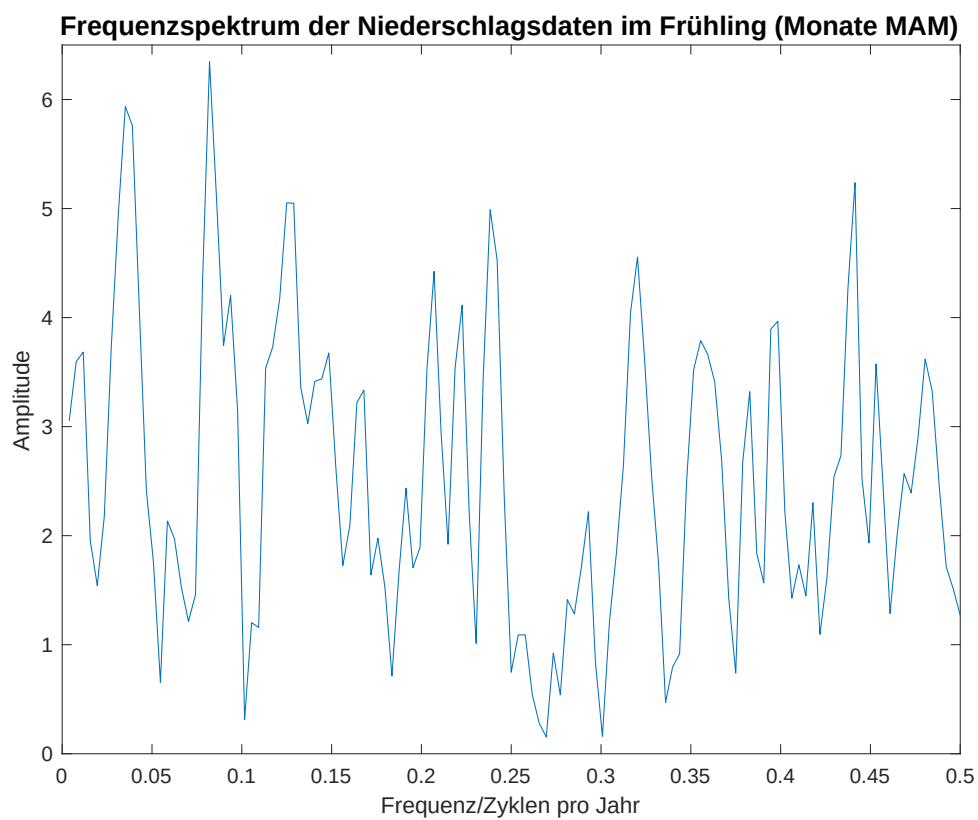


Abb. 3.10: Frequenzspektrum der Niederschlagsdaten im Frühling (Monate März, April, Mai).

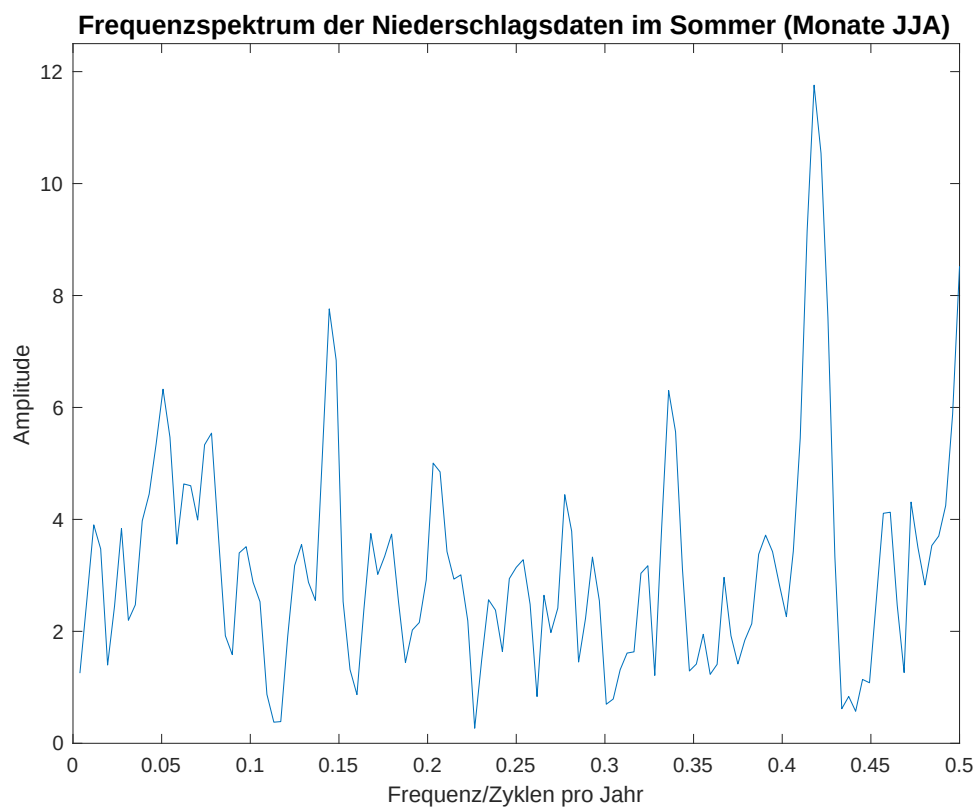


Abb. 3.11: Frequenzspektrum der Niederschlagsdaten im Sommer (Monate Juni, Juli, August).

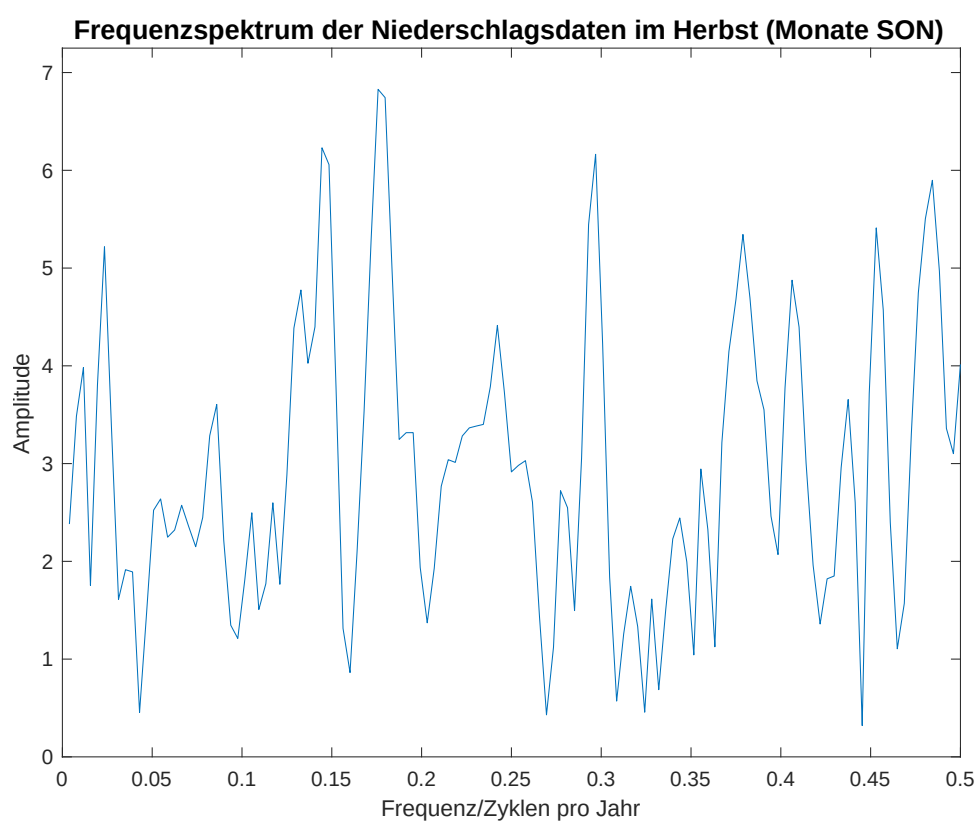


Abb. 3.12: Frequenzspektrum der Niederschlagsdaten im Herbst (Monate September, Oktober, November).

Winter Abbildung 3.9 zeigt das Frequenzspektrum der Niederschlagsdaten im Winter (Monate Dezember, Januar und Februar). Im gesamten Frequenzspektrum sind Peaks vergleichbarer Amplituden anzutreffen. Ein Peak im mittleren Frequenzbereich bei 0.26 Zyklen pro Jahr sticht jedoch deutlich hervor, da er den grössten Peak im Frequenzspektrum darstellt. Auffällig ist zudem der Frequenzbereich zwischen 0.35 und 0.4 Zyklen pro Jahr, in dem keine nennenswerten Peaks zu finden sind. Im niedrigen Frequenzbereich befinden sich tendenziell kleinere, jedoch zahlreichere Peaks.

Frühling Abbildung 3.10 zeigt das Frequenzspektrum der Niederschlagsdaten im Frühling (Monate März, April und Mai). In diesem Frequenzspektrum sind die Peaks nahezu gleich gross, mit Ausnahme der Peaks im niedrigen Frequenzbereich bei 0.04 Zyklen pro Jahr und bei 0.07 Zyklen pro Jahr, die etwas markanter ausfallen als die übrigen. Die Frequenzbereiche zwischen 0.13 und 0.20 sowie zwischen 0.25 und 0.28 Zyklen pro Jahr enthalten keine auffälligen Peaks. In den restlichen Bereichen sind die Peaks gleichmässig verteilt aufzufinden.

Sommer Abbildung 3.11 zeigt das Frequenzspektrum der Niederschlagsdaten im Sommer (Monate Juni, Juli und August). Besonders hervorzuheben ist der Peak im Hochfrequenzbereich bei 0.42 Zyklen pro Jahr. Weitere vergleichsweise markante Peaks finden sich im niedrigen Frequenzbereich bei 0.05 und 0.15 Zyklen pro Jahr sowie im Hochfrequenzbereich bei 0.34 und 0.5 Zyklen pro Jahr. Alle übrigen Peaks im Spektrum sind von ähnlicher Grösse und gleichmässig verteilt.

Herbst Abbildung 3.12 zeigt das Frequenzspektrum der Niederschlagsdaten im Herbst (Monate September, Oktober und November). In diesem Spektrum weisen die Peaks eine nahezu gleiche Amplitude auf. Besonders auffällig ist der Frequenzbereich zwischen 0.03 und 0.12 Zyklen pro Jahr, der keine vergleichbaren Peaks enthält. Auch zwischen 0.31 und 0.37 Zyklen pro Jahr sind keine markanten Peaks vorhanden.

3.2.2 Signifikanztest

Wie bei den Temperaturdaten werden die Signifikanztests der dargestellten Frequenzspektren präsentiert, um die statistische Relevanz der Peaks zu überprüfen. Die Darstellung der Signifikanztests erfolgt auf dieselbe Weise wie bei den Temperaturdaten: Grün markierte Peaks sind statistisch signifikant, während die rote Kurve das 95%-Konfidenzintervall darstellt, ab dem die Peaks als statistisch signifikant bewertet werden. Die Achsenbeschriftungen der x- und y-Achse sind identisch mit denen der Signifikanztests der Temperaturdaten: Die x-Achse zeigt die Frequenz von 0 bis 0.5 Zyklen pro Jahr an, wohingegen die y-Achse die Power der einzelnen Frequenzen angibt.

Winter Abbildung 3.13 zeigt den Signifikanztest des Frequenzspektrums der Niederschlagsdaten im Winter (Monate Dezember, Januar und Februar). Die Peaks bei 0.03 und 0.06 Zyklen pro Jahr sind statistisch nicht signifikant. Alle anderen Peaks hingegen sind statistisch signifikant.

Frühling Abbildung 3.14 zeigt den Signifikanztest des Frequenzspektrums der Niederschlagsdaten im Frühling (Monate März, April und Mai). Alle Peaks sind statistisch signifikant. Ein vergleichsweise kleiner Peak direkt zu Beginn des Frequenzspektrums bei 0.01 Zyklen pro Jahr ist jedoch statistisch nicht signifikant.

Sommer Abbildung 3.15 zeigt den Signifikanztest des Frequenzspektrums der Niederschlagsdaten im Sommer (Monate Juni, Juli und August). Die Peaks zu Beginn des Spektrums bei 0.01 und 0.03 Zyklen pro Jahr sind statistisch nicht signifikant. Alle anderen Peaks sind statistisch signifikant.

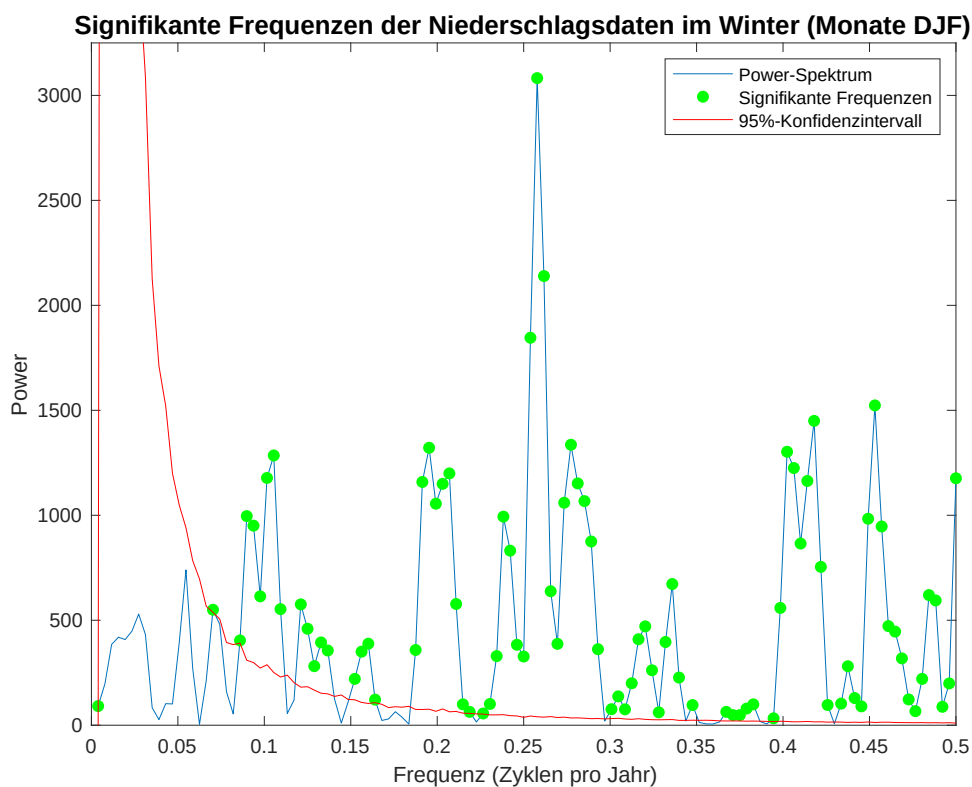


Abb. 3.13: Signifikanztest des Frequenzspektrums der Niederschlagsdaten im Winter (Monate Dezember, Januar, Februar).

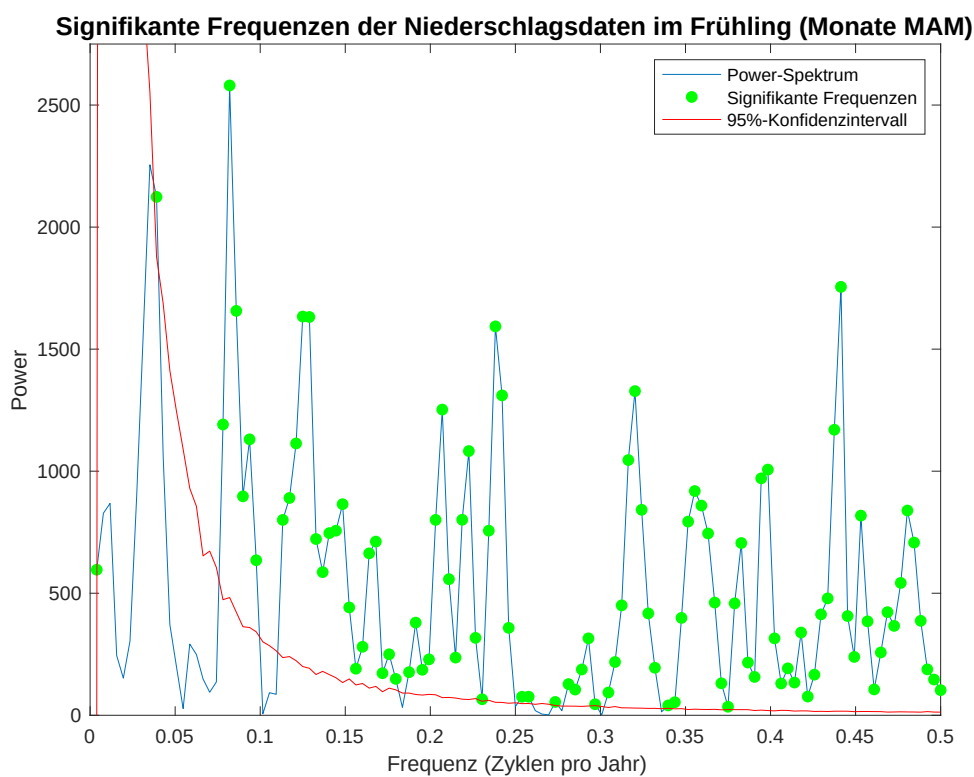


Abb. 3.14: Signifikanztest des Frequenzspektrums der Niederschlagsdaten im Frühling (Monate März, April, Mai).

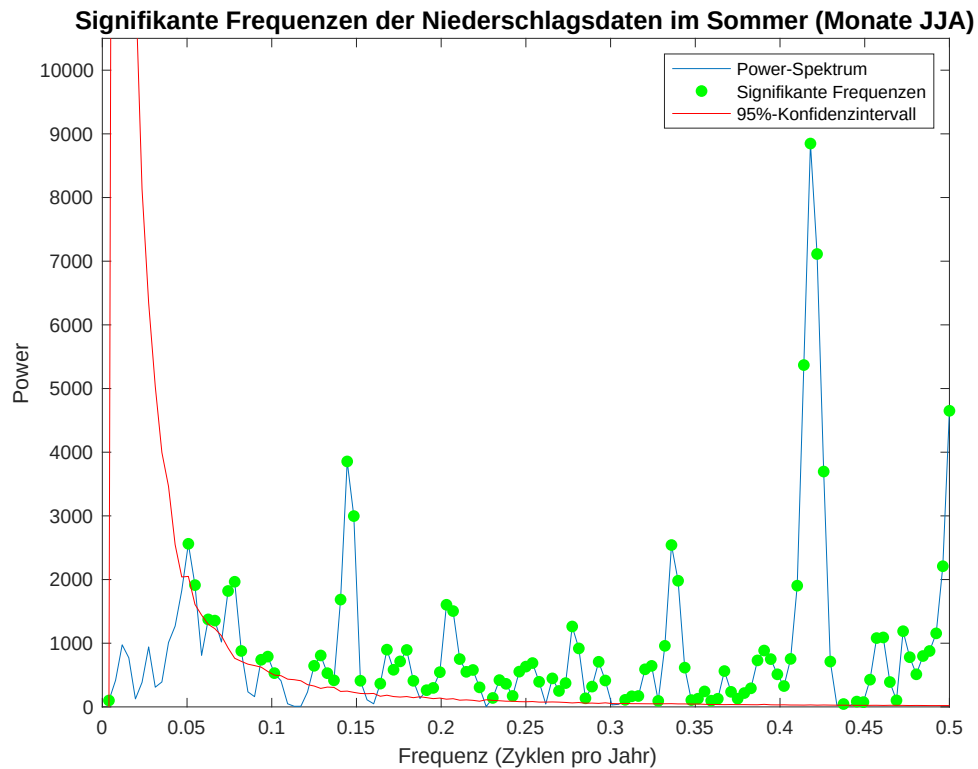


Abb. 3.15: Signifikanztest des Frequenzspektrums der Niederschlagsdaten im Sommer (Monate Juni, Juli, August).

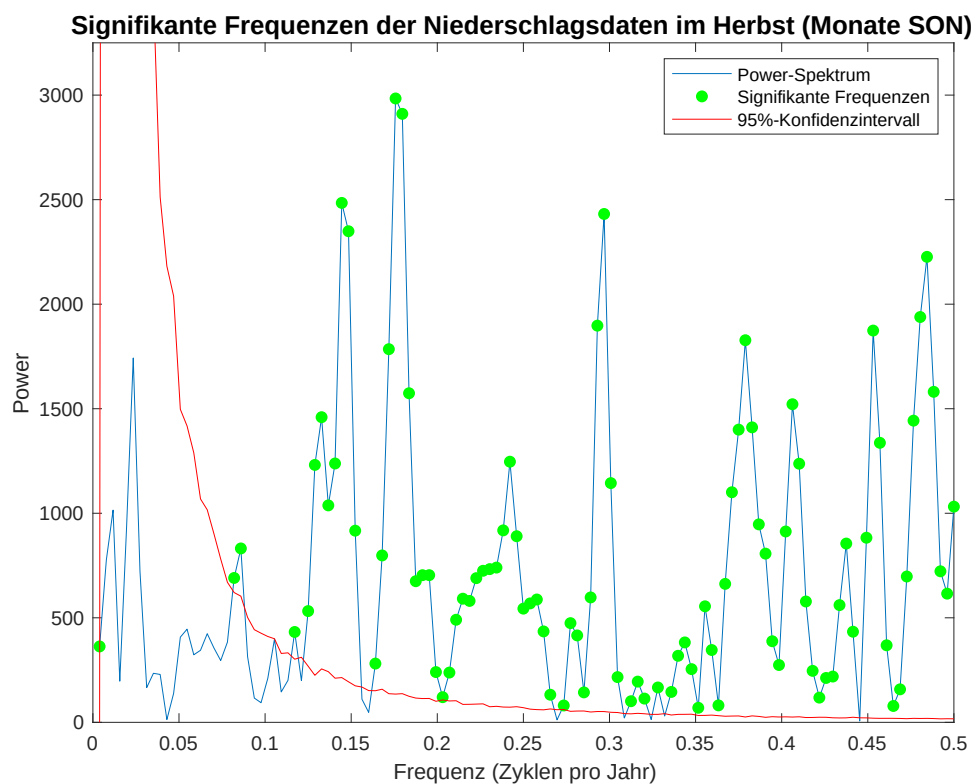


Abb. 3.16: Signifikanztest des Frequenzspektrums der Niederschlagsdaten im Herbst (Monate September, Oktober, November).

Herbst Abbildung 3.16 zeigt den Signifikanztest des Frequenzspektrums der Niederschlagsdaten im Herbst (Monate September, Oktober und November). Ein grösserer Peak bei 0.02 Zyklen pro Jahr ist statistisch nicht signifikant. Ein vergleichsweise kleiner Peak direkt zu Beginn des Spektrums bei 0.01 Zyklen pro Jahr ist ebenfalls nicht signifikant. Alle weiteren Peaks sind hingegen statistisch signifikant.

3.3 NAO-Index

In diesem Abschnitt wird die Fourier-Analyse des NAO-Index präsentiert. Die Resultate umfassen die Frequenzspektren der einzelnen Jahreszeiten. Abschliessend wird der Signifikanztest der Frequenzspektren dargestellt, um die Relevanz der einzelnen Peaks im Frequenzspektrum zu überprüfen. Im Anhang sind zudem die visualisierten Rohdaten zu finden, die einen Überblick über den analysierten NAO-Index bieten.

3.3.1 Frequenzspektren

Die Frequenzspektren des NAO-Index werden auf die gleiche Weise wie die der Temperatur- und Niederschlagsdaten dargestellt. Dabei ist die x-Achse, wie bereits zuvor, mit 0 bis 0.5 Zyklen pro Jahr beschriftet. Die y-Achse stellt wie gewohnt die Amplitude der jeweiligen Frequenzen dar. Wie auch zuvor sollen lediglich die Peaks beschrieben werden, die Identifikation der Zyklen erfolgt im nächsten Kapitel.

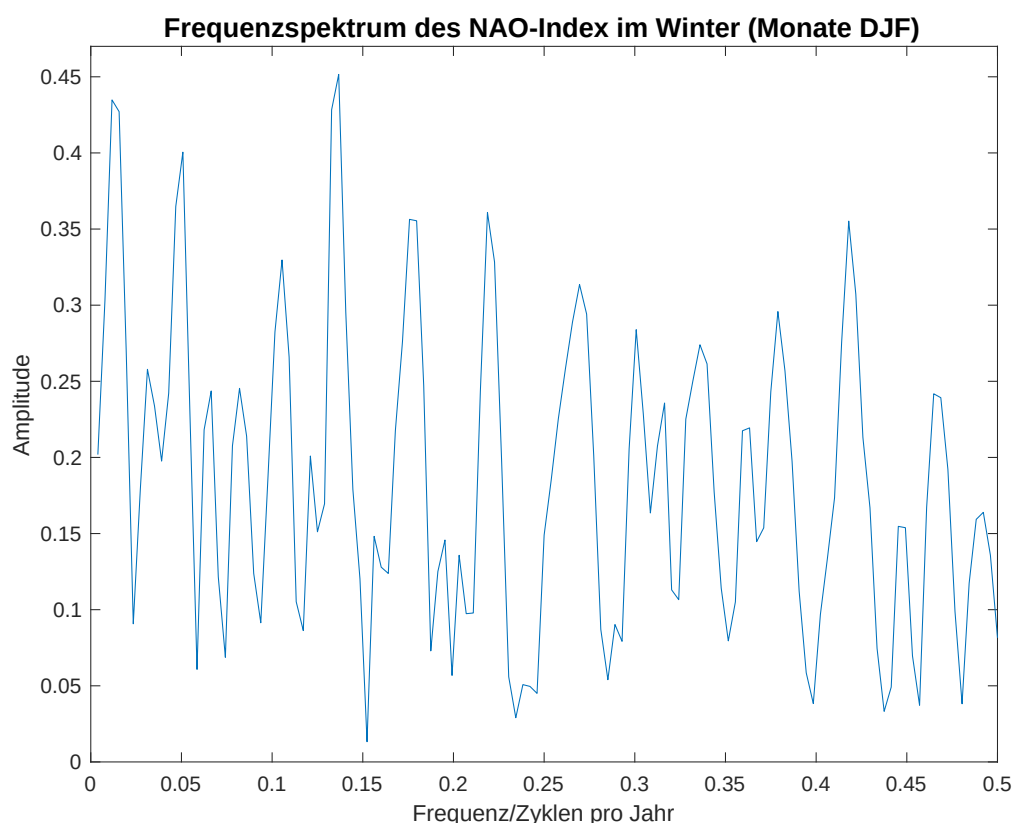


Abb. 3.17: Frequenzspektrum des NAO-Index im Winter (Monate Dezember, Januar, Februar).

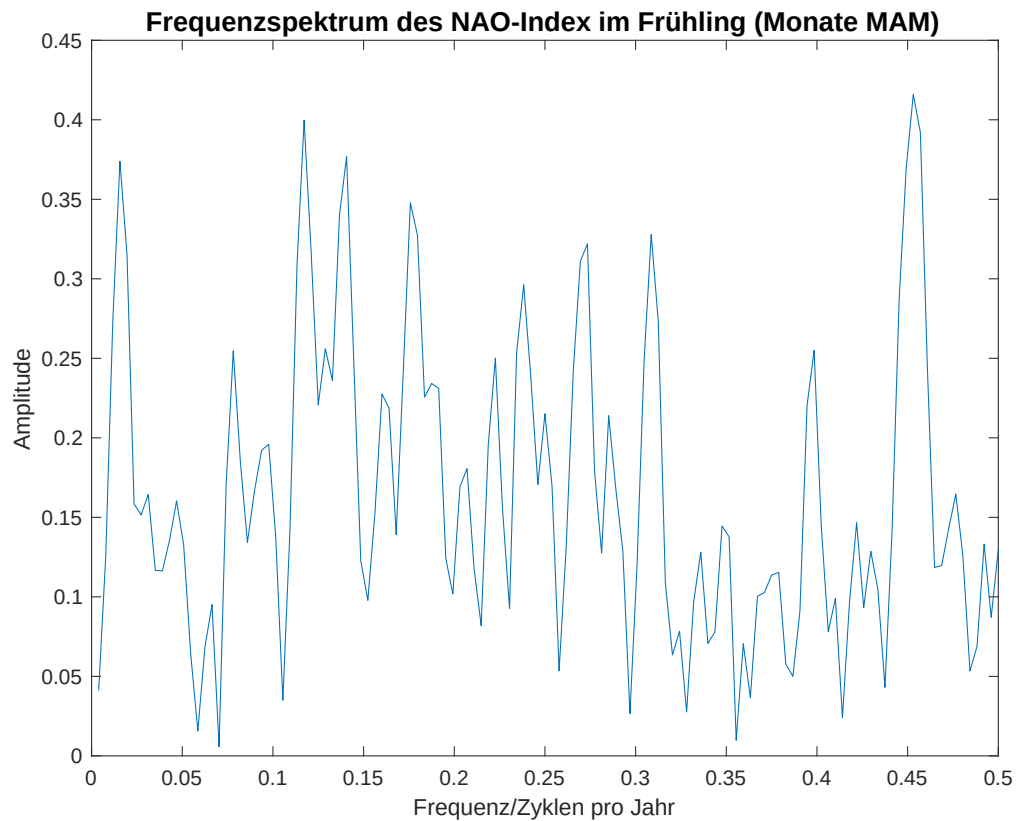


Abb. 3.18: Frequenzspektrum des NAO-Index im Frühling (Monate März, April, Mai).

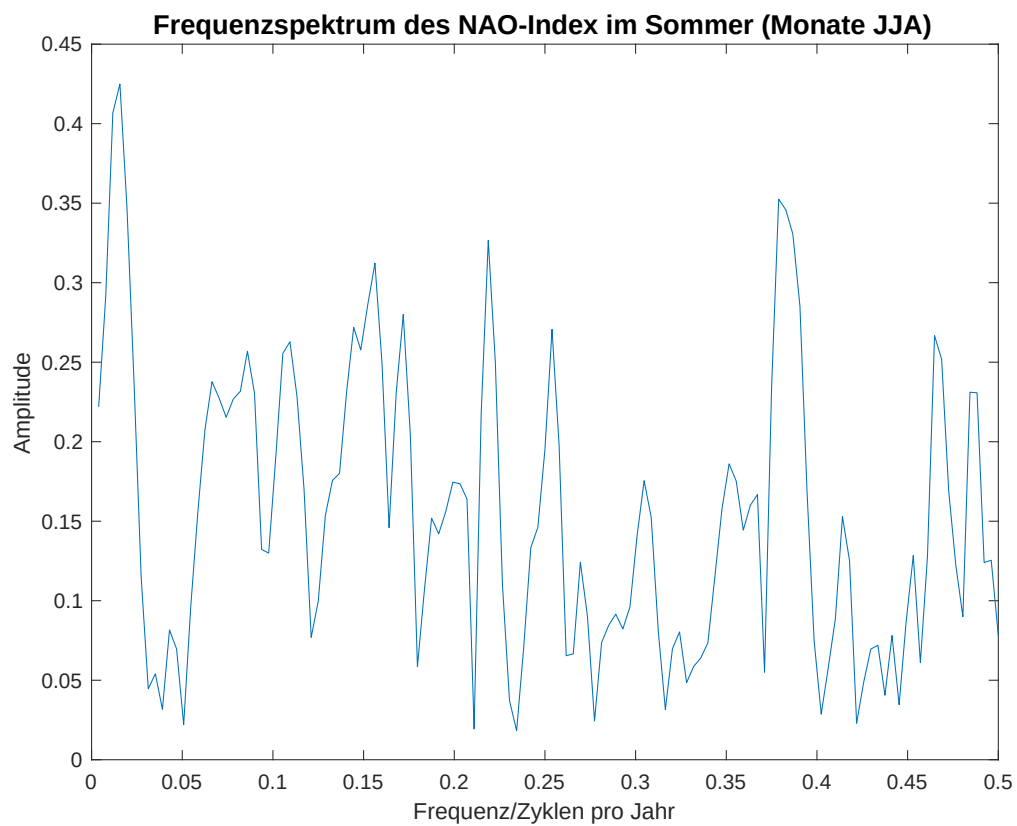


Abb. 3.19: Frequenzspektrum des NAO-Index im Sommer (Monate Juni, Juli, August).

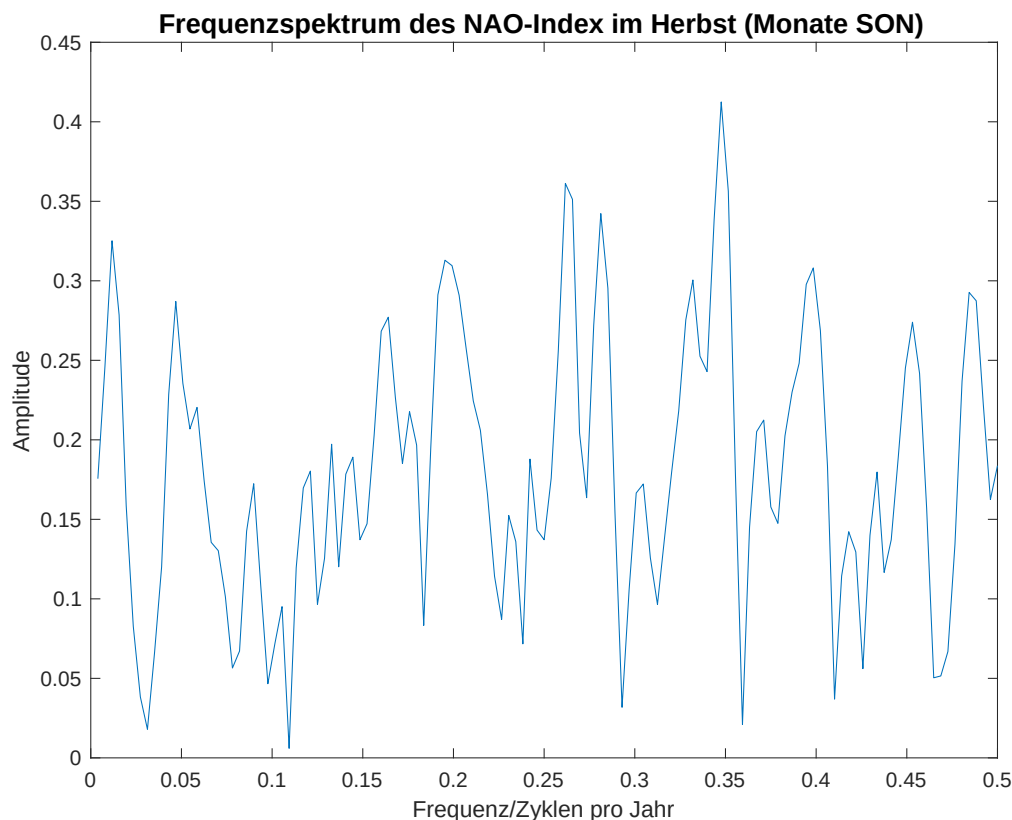


Abb. 3.20: Frequenzspektrum des NAO-Index im Herbst (Monate September, Oktober, November).

Winter Abbildung 3.17 zeigt das Frequenzspektrum des NAO-Index im Winter (Monate Dezember, Januar, Februar). Dieses Frequenzspektrum weist eine grosse Anzahl an gleichmässig verteilten Peaks auf, die alle etwa gleich gross sind. Tendenziell werden die Peaks mit zunehmender Frequenz leicht kleiner, jedoch lässt sich insgesamt feststellen, dass im gesamten Spektrum keine Peaks besonders hervorstechen. Auffällig ist jedoch der Frequenzbereich zwischen 0.06 und 0.09 Zyklen pro Jahr, der keine vergleichbaren Peaks enthält.

Frühling Abbildung 3.18 zeigt das Frequenzspektrum des NAO-Index im Frühling (Monate März, April und Mai). Im gesamten Frequenzspektrum sind Peaks mit ungefähr gleicher Amplitude anzutreffen. Bemerkenswert ist der Frequenzbereich zwischen 0.32 und 0.44 Zyklen pro Jahr, der mit Ausnahme des Peaks bei 0.4 Zyklen pro Jahr keine weiteren nennenswerten Peaks aufweist. Daher fällt der folgende grösste Peak im Frequenzspektrum bei 0.45 Zyklen pro Jahr besonders auf, obwohl er nicht wesentlich grösser ist als die anderen Peaks. Ebenfalls auffällig ist der Frequenzbereich zwischen 0.03 und 0.06 Zyklen pro Jahr, der keine markanten Peaks enthält.

Sommer Abbildung 3.19 zeigt das Frequenzspektrum des NAO-Index im Sommer (Monate Juni, Juli und August). Direkt zu Beginn des Frequenzspektrums bei 0.02 Zyklen pro Jahr ist der grösste Peak zu finden. Es folgen, gleichmässig über das restliche Spektrum verteilt, zahlreiche Peaks mit etwa gleicher Grösse. Bemerkenswert sind die Frequenzbereiche von 0.26 bis 0.36 Zyklen pro Jahr sowie von 0.4 bis 0.46 Zyklen pro Jahr, die keine grösseren Peaks aufweisen.

Herbst Abbildung 3.20 zeigt das Frequenzspektrum des NAO-Index im Herbst (Monate September, Oktober und November). Die Peaks sind gleichmässig im Frequenzspektrum verteilt und weisen etwa die gleiche Amplitude auf, wobei der Peak bei 0.34 Zyklen pro Jahr etwas grösser ausfällt. Auffällig ist der Frequenzbereich zwischen 0.07 und 0.14 Zyklen pro Jahr, der keine grösseren Peaks enthält.

3.3.2 Signifikanztest

Wie bei den Temperatur- und Niederschlagsdaten werden die Signifikanztests der dargestellten Frequenzspektren präsentiert, um die statistische Relevanz der Peaks zu überprüfen. Die Darstellung der Signifikanztests erfolgt auf dieselbe Weise wie zuvor: Grün markierte Peaks sind statistisch signifikant, während die rote Kurve das 95%-Konfidenzintervall darstellt, ab dem die Peaks als statistisch signifikant bewertet werden. Die Achsenbeschriftungen der x- und y-Achse sind identisch mit denen der Signifikanztests der Temperatur- und Niederschlagsdaten: Die x-Achse zeigt die Frequenz von 0 bis 0.5 Zyklen pro Jahr an, die y-Achse stellt die Power der einzelnen Frequenzen dar.

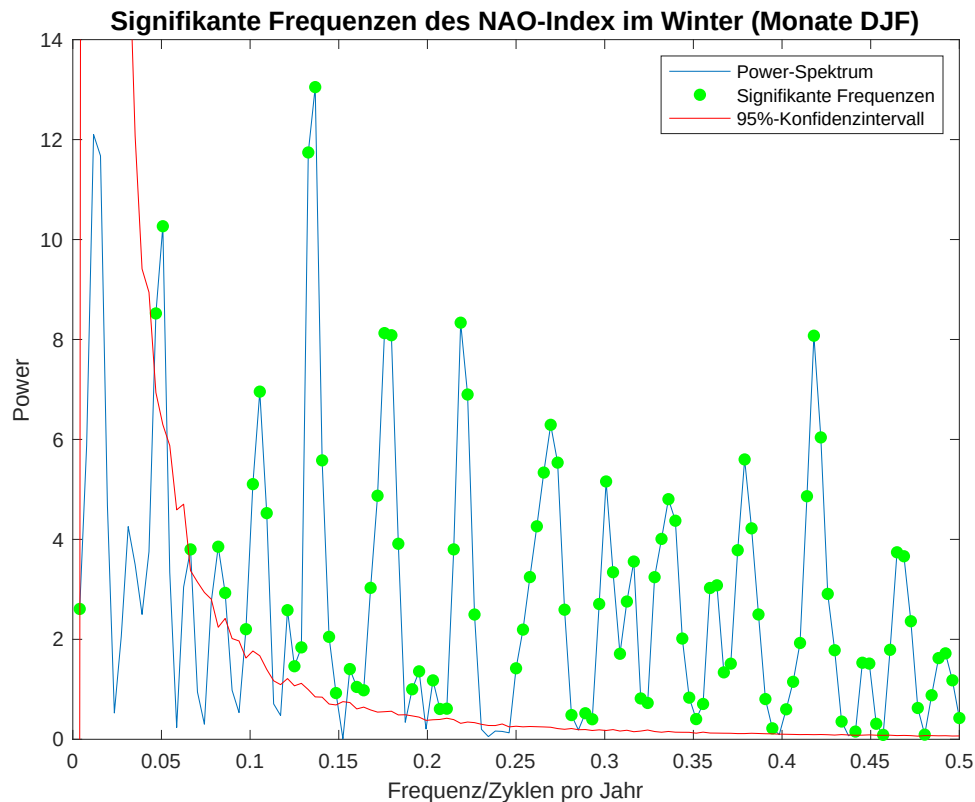


Abb. 3.21: Signifikanztest des Frequenzspektrums des NAO-Index im Winter (Monate Dezember, Januar, Februar).

Winter Abbildung 3.21 zeigt den Signifikanztest des Frequenzspektrums des NAO-Index im Winter (Monate Dezember, Januar und Februar). Ein markanter Peak direkt zu Beginn des Spektrums bei 0.01 Zyklen pro Jahr sowie ein kleinerer Peak bei 0.04 Zyklen pro Jahr sind statistisch nicht signifikant. Alle anderen Peaks sind jedoch statistisch signifikant.

Frühling Abbildung 3.22 zeigt den Signifikanztest des Frequenzspektrums des NAO-Index im Frühling (Monate März, April und Mai). Abgesehen vom grösseren Peak unmittelbar nach dem Beginn des Spektrums bei 0.01 Zyklen pro Jahr sind alle Peaks statistisch signifikant.

Sommer Abbildung 3.23 zeigt den Signifikanztest des Frequenzspektrums des NAO-Index im Sommer (Monate Juni, Juli und August). Der grösste Peak im Frequenzspektrum, der direkt zu Beginn des Spektrums bei 0.01 Zyklen pro Jahr auftritt, ist statistisch nicht signifikant. Die übrigen Peaks sind jedoch statistisch signifikant.

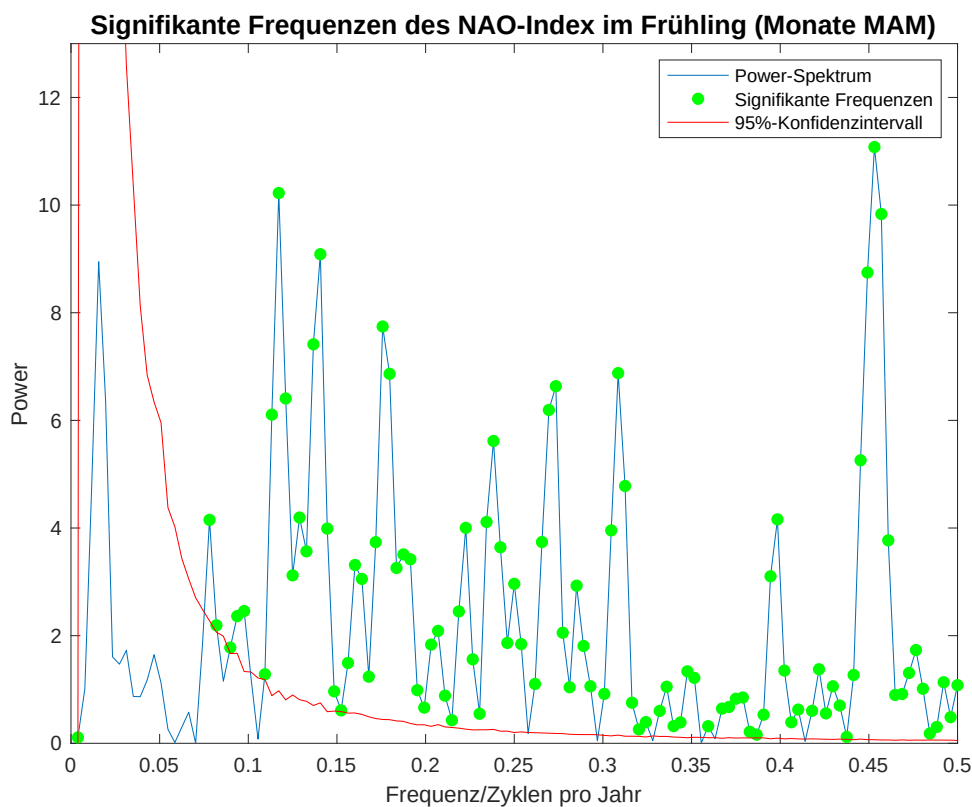


Abb. 3.22: Signifikanztest des Frequenzspektrums des NAO-Index im Frühling (Monate März, April, Mai).

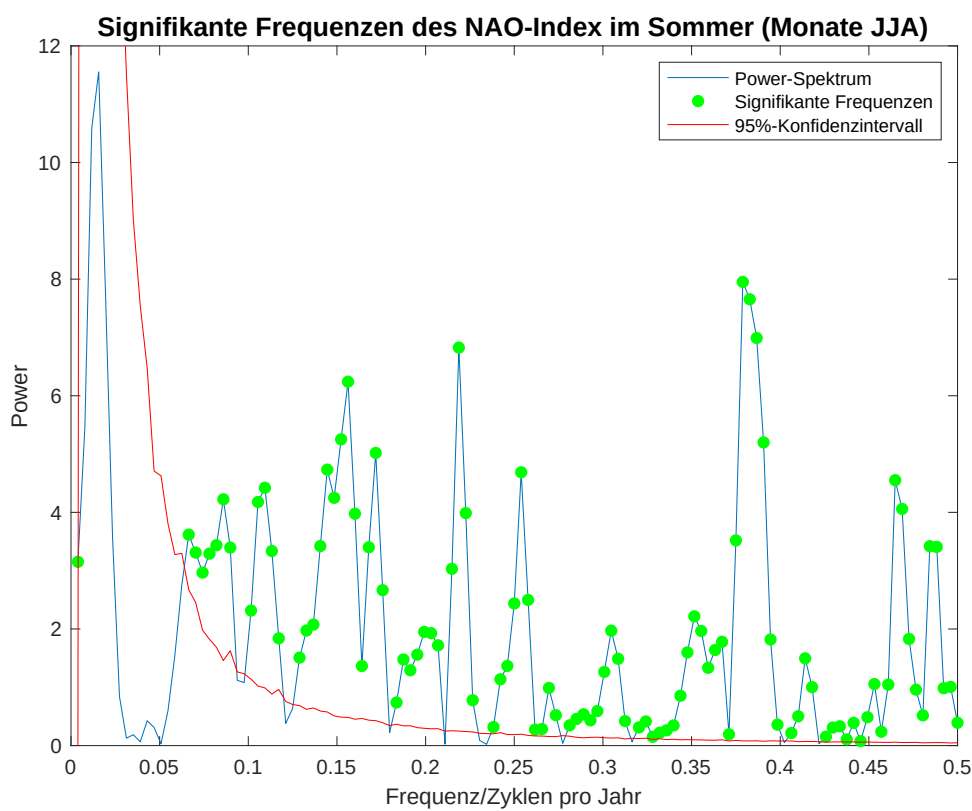


Abb. 3.23: Signifikanztest des Frequenzspektrums des NAO-Index im Sommer (Monate Juni, Juli, August).

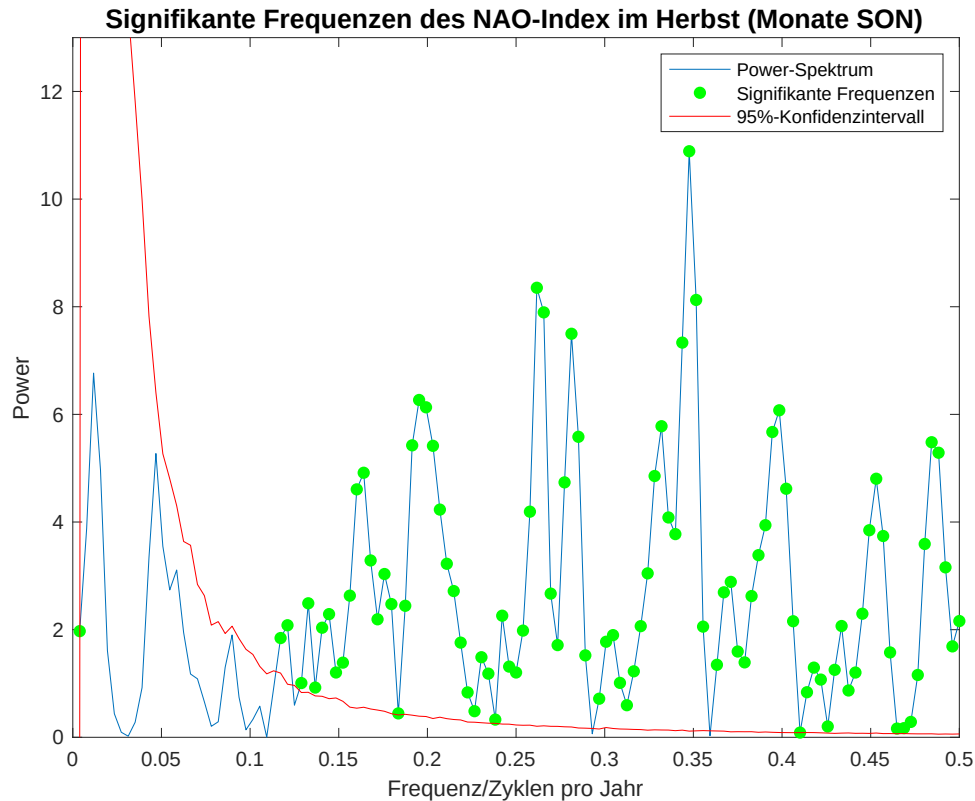


Abb. 3.24: Signifikanztest des Frequenzspektrums des NAO-Index im Herbst (Monate September, Oktober, November).

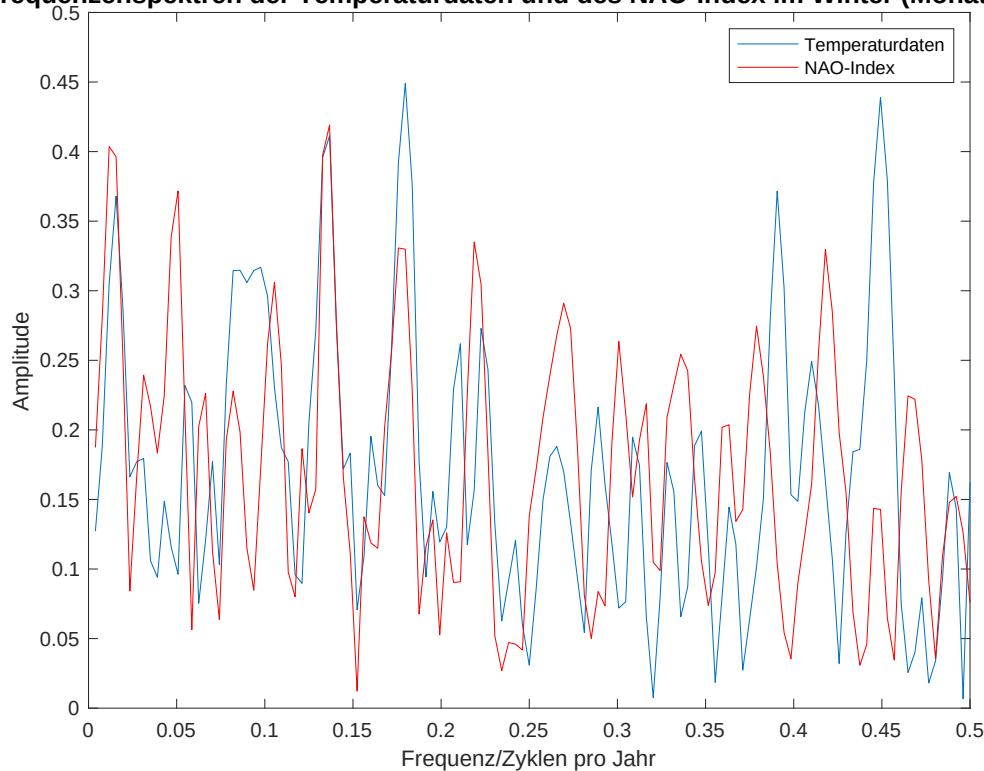
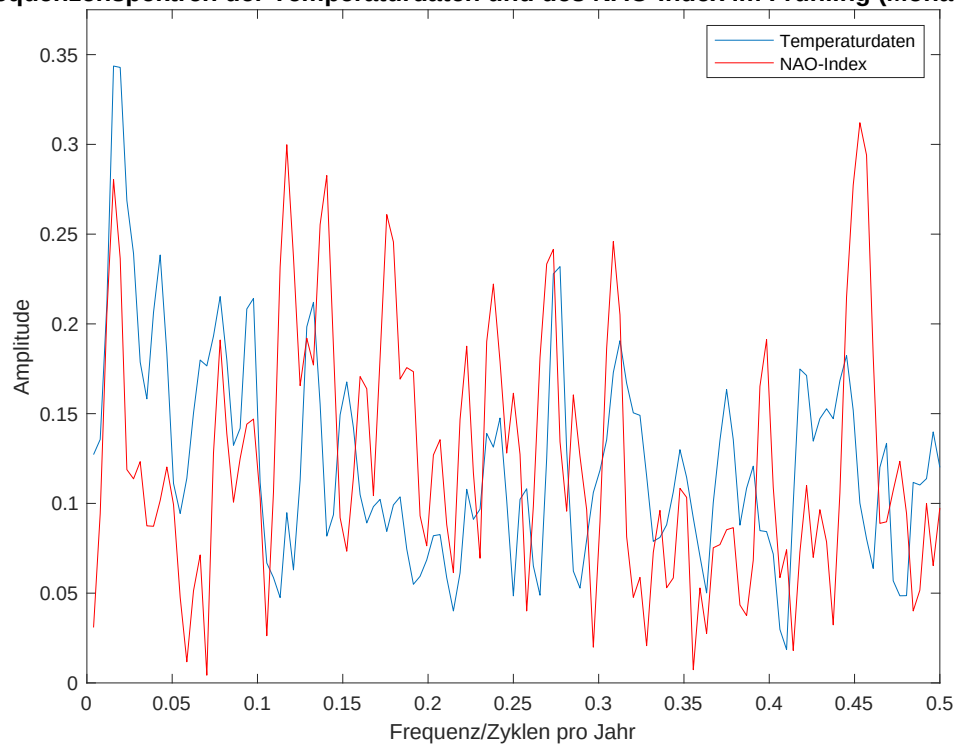
Herbst Abbildung 3.24 zeigt den Signifikanztest des Frequenzspektrums des NAO-Index im Herbst (Monate September, Oktober und November). Zwei Peaks zu Beginn des Frequenzspektrums bei 0.01 und 0.05 Zyklen pro Jahr sind statistisch nicht signifikant. Ebenfalls erweist sich ein kleinerer Peak bei 0.9 Zyklen pro Jahr ebenfalls als statistisch nicht signifikant. Alle weiteren Peaks sind hingegen statistisch signifikant.

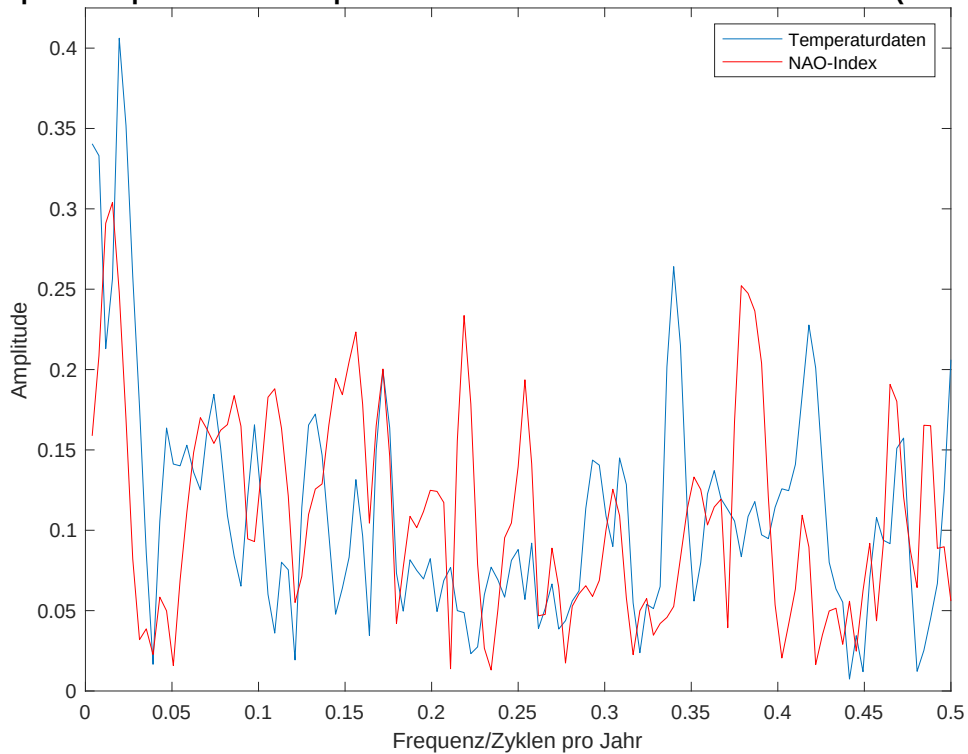
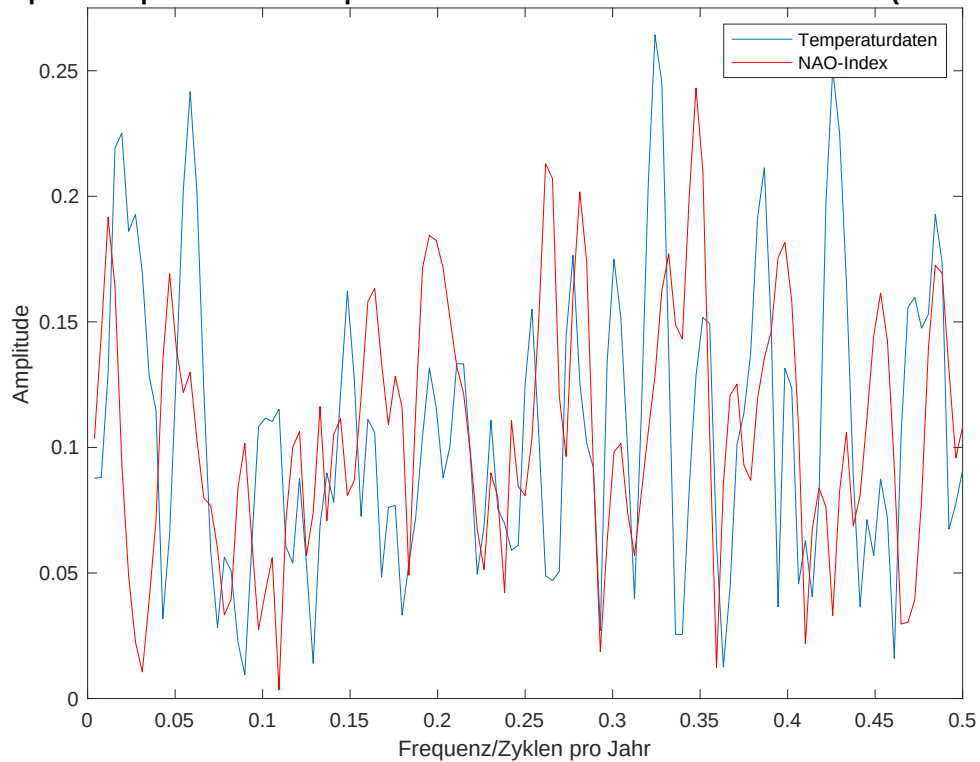
3.4 Vergleich der Frequenzspektren

Im folgenden Abschnitt werden die Frequenzspektren des NAO-Index und der Klimadaten qualitativ verglichen. Dabei werden die Frequenzspektren als Ganzes betrachtet, anstatt nur einzelne Peaks zu vergleichen. Für einen vereinfachten Vergleich wurden, wie in Kapitel 2.6.3 erläutert wurde, skalierte Versionen der Frequenzspektren übereinander abgebildet. Nicht-signifikante Frequenzen werden bei diesem Vergleich ignoriert. Die Analyse der Korrelation der Frequenzspektren des NAO-Index und der Klimadaten erfolgt im nächsten Kapitel.

3.4.1 NAO-Index und Temperaturdaten

Die x-Achse ist, wie bei den zuvor dargestellten Frequenzspektren, mit 0 bis 0.5 Zyklen pro Jahr beschriftet, und die y-Achse zeigt wie gewohnt die Amplitude an. Das skalierte Frequenzspektrum der Temperaturdaten ist für die jeweilige Jahreszeit blau eingezeichnet, während das skalierte Frequenzspektrum des NAO-Index in Rot dargestellt ist.

Frequenzspektren der Temperaturdaten und des NAO-Index im Winter (Monate DFJ)**Abb. 3.25:** Vergleich der Frequenzspektren der Temperaturdaten und des NAO-Index im Winter (Monate Dezember, Januar, Februar).**Frequenzspektren der Temperaturdaten und des NAO-Index im Frühling (Monate MAM)****Abb. 3.26:** Vergleich der Frequenzspektren der Temperaturdaten und des NAO-Index im Frühling (Monate März, April, Mai).

Frequenzspektren der Temperaturdaten und des NAO-Index im Sommer (Monate JJA)**Abb. 3.27:** Vergleich der Frequenzspektren der Temperaturdaten und des NAO-Index im Sommer (Monate Juni, Juli, August).**Frequenzspektren der Temperaturdaten und des NAO-Index im Herbst (Monate SON)****Abb. 3.28:** Vergleich der Frequenzspektren der Temperaturdaten und des NAO-Index im Herbst (Monate September, Oktober, November).

3.4 Vergleich der Frequenzspektren

Winter Abbildung 3.25 zeigt die skalierten Frequenzspektren der Temperaturdaten und des NAO-Index im Winter (Monate Dezember, Januar und Februar). Es lässt sich eine stärkere Korrelation erkennen, die insbesondere im niedrigen Frequenzbereich deutlich wird. Allerdings ist im niedrigen Frequenzbereich ein Peak der Temperaturdaten bei 0.09 Zyklen pro Jahr isoliert, was aufgrund der grösseren Korrelation in den angrenzenden Bereichen besonders auffällt. Nach dem Peak bei 0.27 Zyklen pro Jahr, der sowohl in den Temperaturdaten als auch im NAO-Index vorkommt, nimmt die Korrelation abrupt ab und ist im restlichen Spektrum kaum mehr feststellbar.

Frühling Abbildung 3.26 zeigt die skalierten Frequenzspektren der Temperaturdaten und des NAO-Index im Frühling (Monate März, April und Mai). Insgesamt ist keine erhebliche Korrelation erkennbar. Einzelne Frequenzbereiche, insbesondere zu Beginn des Spektrums um 0.1 Zyklen pro Jahr sowie vereinzelt im Bereich von 0.2 bis 0.35 Zyklen pro Jahr, weisen jedoch eine stärkere Korrelation auf.

Sommer Abbildung 3.27 zeigt die skalierten Frequenzspektren der Temperaturdaten und des NAO-Index im Sommer (Monate Juni, Juli und August). Hier ist keine nennenswerte Korrelation zu beobachten. Nur vereinzelt, wie etwa bei den Peaks bei 0.17 und 0.46 Zyklen pro Jahr, ist eine stärkere Übereinstimmung zu verzeichnen.

Herbst Abbildung 3.28 zeigt die skalierten Frequenzspektren der Temperaturdaten und des NAO-Index im Herbst (Monate September, Oktober und November). Auch hier lässt sich insgesamt keine nennenswerte Korrelation feststellen. Lediglich eine Frequenzkomponente bei 0.48 Zyklen pro Jahr weist eine grössere Übereinstimmung auf, während im restlichen Spektrum keine Korrelation vorhanden ist.

3.4.2 NAO-Index und Niederschlagsdaten

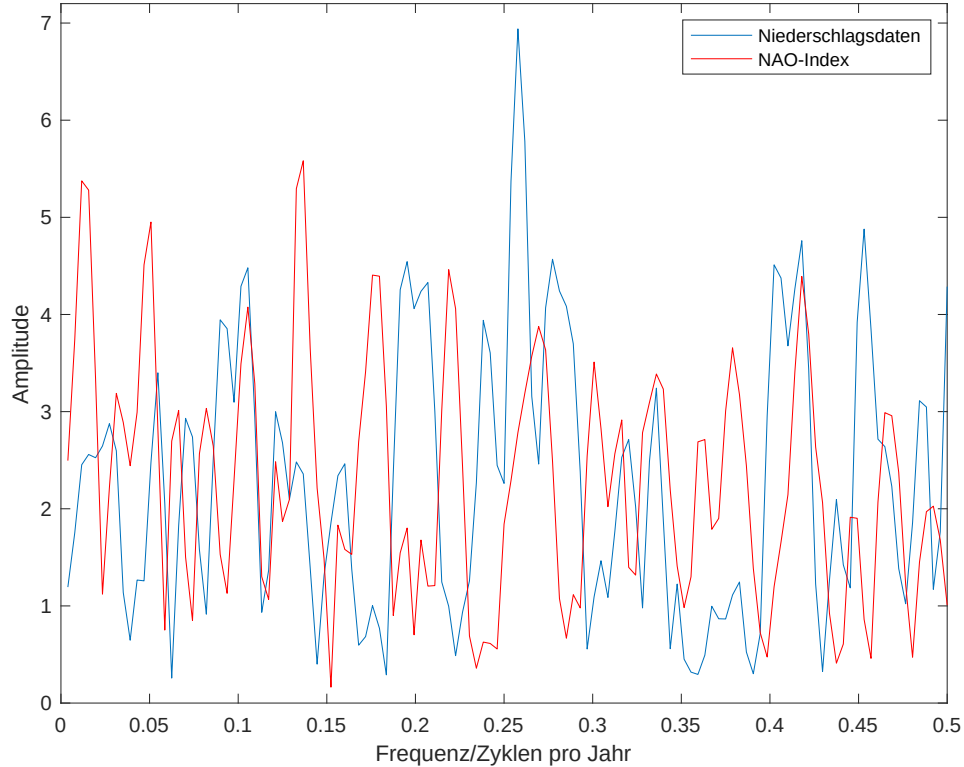
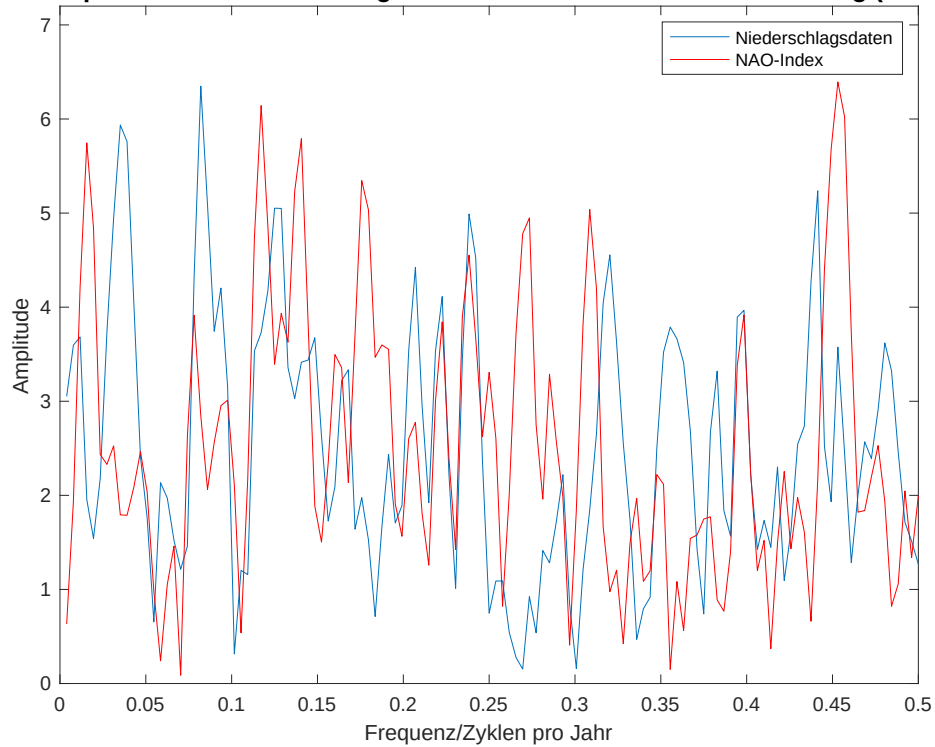
Die x-Achse ist, wie bei den Frequenzspektren zuvor, mit 0 bis 0.5 Zyklen pro Jahr beschriftet, während die y-Achse wie gewohnt die Amplitude anzeigt. In Blau ist das skalierte Frequenzspektrum der Niederschlagsdaten in der jeweiligen Jahreszeit dargestellt, in Rot das skalierte Frequenzspektrum des NAO-Index derselben Jahreszeit.

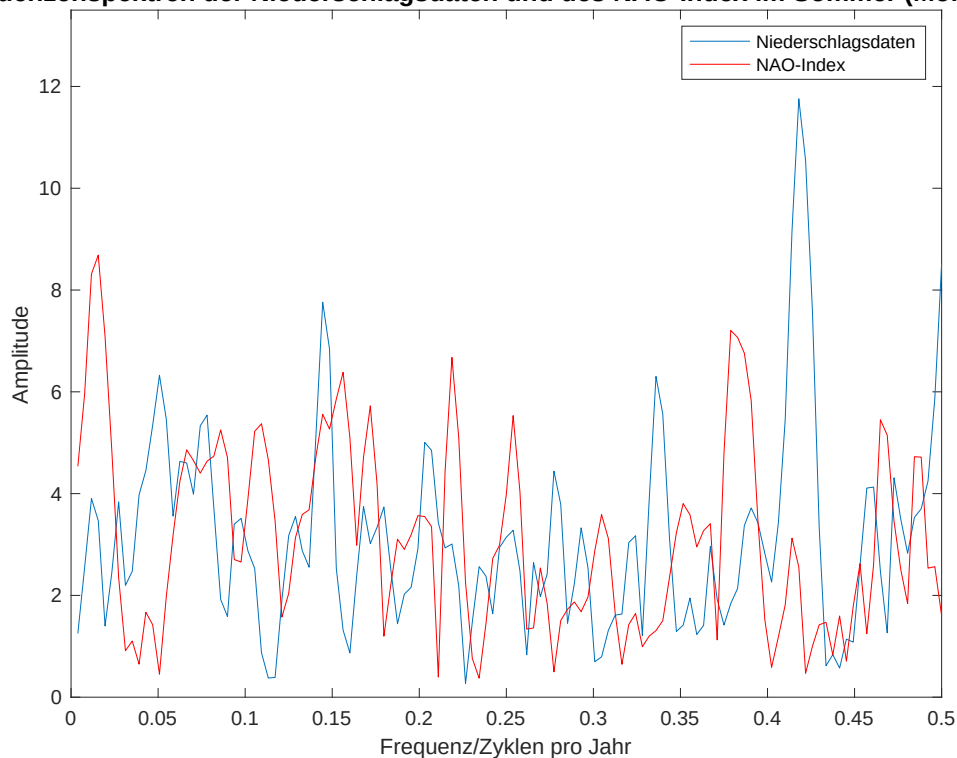
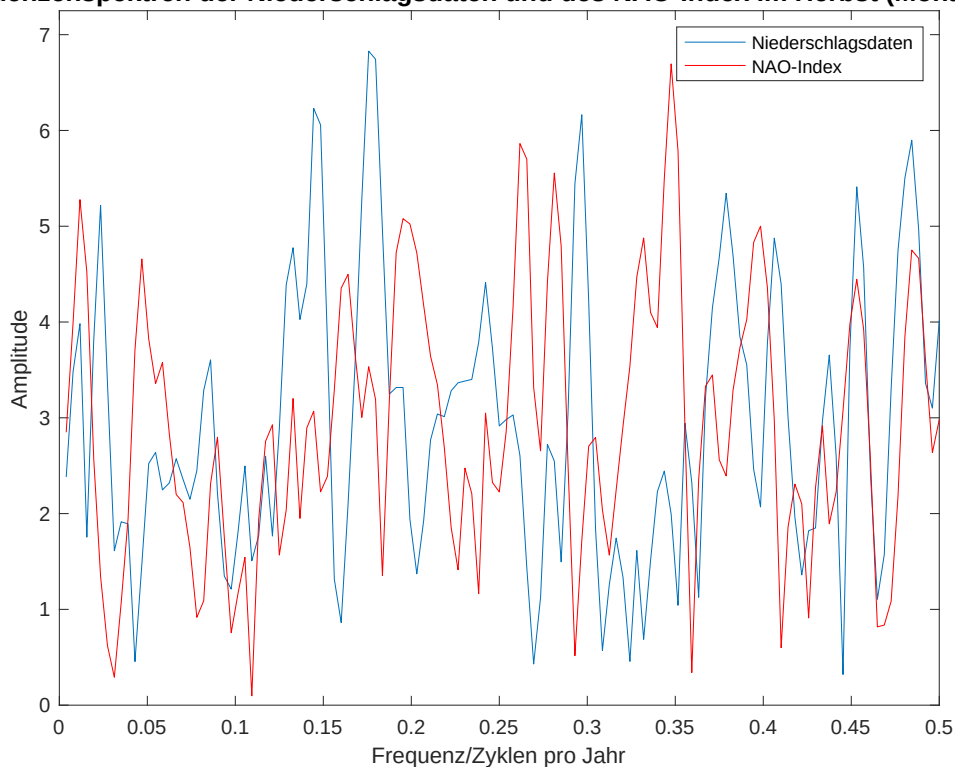
Winter Abbildung 3.29 zeigt die skalierten Frequenzspektren der Niederschlagsdaten und des NAO-Index im Winter (Monate Dezember, Januar und Februar). Es lässt sich eine mässige Korrelation im Hochfrequenzbereich ab 0.32 Zyklen pro Jahr feststellen, mit Ausnahme des isolierten Peaks des NAO-Index bei 0.37 Zyklen pro Jahr. Bis zu diesem Punkt ist keine Korrelation erkennbar, jedoch gibt es einen gemeinsamen Peak bei 0.1 Zyklen pro Jahr.

Frühling Abbildung 3.30 zeigt die skalierten Frequenzspektren der Niederschlagsdaten und des NAO-Index im Frühling (Monate März, April und Mai). Insgesamt ist eine mässige Korrelation festzustellen: Der Frequenzbereich bei 0.21 bis 0.25 Zyklen pro Jahr weist eine grössere Korrelation auf. Zudem existiert ein weiterer gemeinsamer Peak bei 0.4 Zyklen pro Jahr. Weitere kleine Frequenzbereiche zeigen ebenfalls eine Korrelation, wenn auch eher schwach.

Sommer Abbildung 3.31 zeigt die skalierten Frequenzspektren der Niederschlagsdaten und des NAO-Index im Sommer (Monate Juni, Juli und August). Im ganzen Frequenzbereich ist keine Korrelation erkennbar.

Herbst Abbildung 3.32 zeigt die skalierten Frequenzspektren der Niederschlagsdaten und des NAO-Index im Herbst (Monate September, Oktober und November). Im gesamten Frequenzbereich lässt sich keine Korrelation feststellen. Lediglich zwei Peaks bei 0.45 und 0.48 Zyklen pro Jahr stimmen überein.

Frequenzspektren der Niederschlagsdaten und des NAO-Index im Winter (Monate DJF)**Abb. 3.29:** Vergleich der Frequenzspektren der Niederschlagsdaten und des NAO-Index im Winter (Monate Dezember, Januar, Februar).**Frequenzspektren der Niederschlagsdaten und des NAO-Index im Frühling (Monate MAM)****Abb. 3.30:** Vergleich der Frequenzspektren der Niederschlagsdaten und des NAO-Index im Frühling (Monate März, April, Mai).

Frequenzspektren der Niederschlagsdaten und des NAO-Index im Sommer (Monate JJA)**Abb. 3.31:** Vergleich der Frequenzspektren der Niederschlagsdaten und des NAO-Index im Sommer (Monate Juni, Juli, August).**Frequenzspektren der Niederschlagsdaten und des NAO-Index im Herbst (Monate SON)****Abb. 3.32:** Vergleich der Frequenzspektren der Niederschlagsdaten und des NAO-Index im Herbst (Monate September, Oktober, November).

4 Diskussion

4.1 Limitationen der Methodik

In diesem Abschnitt werden die Limitationen der Fourier-Analyse und des verwendeten Signifikanztests kurz umrissen. Dabei werden ihre spezifischen Implikationen für die Interpretation der Frequenzspektren hervorgehoben, sodass diese im Folgenden berücksichtigt werden können.

4.1.1 Fourier-Analyse

Die Fourier-Analyse unterliegt Limitationen, die bei der Interpretation der Frequenzspektren möglicherweise zu falschen Aussagen führen können. Wie in Abschnitt 2.3 beschrieben wurde, werden die Frequenzspektren durch die Effekte von Aliasing, Leakage und Trends verzerrt [1]. Dazu kommen noch die vergleichsweise kurze Datenlänge sowie potenzielle Ober- und Unterschwingungen, welche bei der Interpretation berücksichtigt werden müssen.

Aliasing Aliasing lässt sich bei den Frequenzspektren nicht ausschliessen, da die Daten in gesampelter, d.h. diskreter, Form vorliegen. Ein Anti-Aliasing-Filter zur Minimierung von Aliasing kann deshalb nicht mehr eingesetzt werden. Dadurch entstehen Unsicherheiten darüber, ob bestimmte Frequenzen tatsächlich in den Daten vorhanden sind oder nur Alias-Frequenzen sind. Selbst wenn statistische Signifikanz vorliegt, bleibt unklar, ob alle Peaks genau bei der im Spektrum angegebenen Frequenz in den Originaldaten auftreten. [1][6]

Leakage Leakage lässt sich in den erhaltenen Frequenzspektren ebenfalls nicht ausschliessen. Obwohl durch die Verwendung eines Hamming-Windows das Leakage erheblich reduziert wurde, kann es nicht vollständig beseitigt werden. Dies führt dazu, dass einige Peaks im Frequenzspektrum übermässig verstärkt oder gar erst sichtbar werden, jedoch bleibt unklar welche Peaks davon betroffen sind. Somit bleibt ungewiss, ob ein Peak wirklich einem realen Zyklus in den Daten entspricht oder lediglich durch Leakage hervorgerufen wurde. [31]

Trends Trends in den Daten stellen eine weitere Herausforderung dar. Mithilfe von `detrend(X)` konnten die Trends teilweise entfernt werden [1]. Jedoch sind die Trends in den analysierten Daten oft nicht rein linear und nicht über die ganze Datenlänge vorhanden, wie in den Abbildungen B.1 bis B.8 im Anhang ersichtlich wird. Dies führt dazu, dass im Frequenzspektrum Verzerrungen verbleiben können, die nicht vollständig eliminiert werden konnten. Insbesondere niedrige Frequenzen könnten daher durch die unvollständig entfernten Trends beeinflusst sein [1], was die Identifikation echter, in den Daten vorhandenen Zyklen erschwert.

Ober- und Unterschwingungen Eine Ober- bzw. Unterschwingung einer Frequenz f bezeichnet ihre verwandten Frequenzkomponenten [10]. Diese haben die Frequenzen kf bzw. $\frac{1}{k}f$ ($k \in \mathbb{Z}$) und entstehen durch eine gemeinsame Ursache [10]. Ein Beispiel aus der Akustik sind hier Saiten, die durch das Zupfen – also durch eine gemeinsame Ursache – einen Grundton und die dazugehörigen Obertöne erzeugen [10]. Überträgt man diesen Prinzip auf die Klimadaten und den NAO-Index kann geschlossen werden, dass ein starker Peak im Frequenzspektrum des NAO-Index gleich mehrere Peaks in den Spektren der Temperatur- oder Niederschlagsdaten aufrufen könnte. Diese Beziehung macht die Deutung einzelner Peaks anspruchsvoller.

Datenlänge Ein weiteres Problem ist die begrenzte Länge der Datensätze, welche die Auflösung des Frequenzspektrums erheblich beeinflusst. Eine kurze Datenlänge reduziert die Auflösung des Frequenzspektrums, da weniger Frequenzen zwischen 0 und 0,5 Zyklen pro Jahr verfügbar sind. Dies bedeutet, dass eng beieinanderliegende Frequenzen möglicherweise nicht klar getrennt werden können, was die

4.2 Identifikation und Interpretation der Zyklen

Präzision der Interpretation verringert. Eine längere Datenreihe würde die Auflösung erhöhen und eine genauere Analyse ermöglichen. [1]

4.1.2 Signifikanztest

Zhang und Moore [7] präsentieren in ihrem Paper eine neue Methode für Signifikanztests geophysikalischer Zeitreihen, zu denen die analysierten Daten gehören. Sie stellen ein modifiziertes Power-Spektrum sowohl für die analysierten Daten als auch für das Nullmodell vor. Dieses bereinigt Verzerrungen im niedrigen und hohen Frequenzbereich und bietet dadurch genauere Resultate sowie einen verbesserten Signifikanztest. [7]

In dieser Maturitätsarbeit wurde jedoch ein traditioneller Signifikanztest ohne die Berücksichtigung modifizierter Spektren durchgeführt. Eine mögliche Erweiterung der Methodik wäre die Implementierung des von Zhang und Moore vorgeschlagenen Verfahren, um einen präziseren Signifikanztest durchzuführen.

Unter Berücksichtigung dieser Limitationen wird nun die Diskussion der Resultate aufgenommen.

4.2 Identifikation und Interpretation der Zyklen

In diesem Abschnitt wird die erste Leitfrage beantwortet:

Wie kann die Fast-Fourier-Transformation (FFT) verwendet werden, um Zyklen in den Temperatur- und Niederschlagsdaten sowie im NAO-Index zu identifizieren?

Der erste Teil dieser Leitfrage, die Durchführung der FFT, wurde bereits in Kapitel 2.6 ausführlich behandelt. Die Resultate wurden in Kapitel 3 detailliert beschrieben, wo zudem die Signifikanztests präsentiert wurden. Auf Grundlage der in Abschnitt 2.6.5 beschriebenen Grundsätze werden die Zyklen nun identifiziert und anschliessend interpretiert.

Aufgrund der vielen Peaks liegt der Fokus bei der Identifikation weniger auf den einzelnen Zyklen, sondern auf ihrer allgemeinen Lage im Frequenzspektrum. Bei der Interpretation wird vor allem die relative Häufigkeit der Peaks im Frequenzspektrum berücksichtigt, und darauf basierend werden Schlussfolgerungen gezogen.

4.2.1 Temperaturdaten

Winter Im Frequenzspektrum des Winters sind einige klare, grosse Peaks zu erkennen (vgl. Abbildung 3.1). Die grossen Peaks sind weder ganzzahlige Vielfache noch Teiler anderer vergleichbarer Peaks, wodurch keine bedeutenden Ober- und Unterschwingungen im Frequenzspektrum nachweisbar sind. Die deutlichen, grösseren Peaks entsprechen nun im klimatologischen Sinn starken Zyklen. Auffällig ist die Verteilung der Zykluslängen: Mittelfristige Zyklen fehlen, während die prägendsten Zyklen länger als 5.6 Jahre oder kürzer als 2.6 Jahre sind. Die Temperatur im Winter wird somit durch einzelne kurzfristige und langfristige Zyklen geprägt.

Frühling Im Frequenzspektrum des Frühlings sind die Peaks von vergleichbarer Grösse und gleichmässig verteilt (vgl. Abbildung 3.2). Betrachtet man die Peaks als Zyklen, zeigt sich, dass die Temperatur im Frühling durch kurz-, mittel- und langfristigen Zyklen gleichermassen beeinflusst wird.

Sommer Im Frequenzspektrum des Sommers sind, ähnlich wie im Frühling, zahlreiche gleich grosse Peaks zu erkennen (vgl. Abbildung 3.3). Diese konzentrieren sich jedoch auf den niedrigen und Hochfrequenzbereich. Betrachtet man die Peaks als Zyklen, wird ersichtlich, dass langfristige Zyklen mit

einer Dauer von über 5.9 Jahren sowie kurzfristige Zyklen unter 3 Jahren dominieren. Die Temperatur im Sommer wird somit vor allem durch kurz- und langfristige Zyklen geprägt.

Herbst Im Frequenzspektrum des Herbstes sind, ähnlich wie im Frühling und Sommer, zahlreiche gleich grosse Peaks zu erkennen. Mit zunehmender Frequenz nimmt die Dichte der Peaks zu. Zusätzlich befinden sich die auffälligeren Peaks speziell im Hochfrequenzbereich (vgl. Abbildung 3.4). Betrachtet man diese Peaks nun als Zyklen, lässt sich folgern, dass die Temperatur im Herbst vor allem durch kurzfristige Zyklen geprägt wird.

Insgesamt wird die Temperatur durch zahlreiche gleich starke Zyklen beeinflusst, wobei ihre Verteilung nicht immer gleichmässig ist: Zyklen treten teils langfristig, teils kurzfristig oder teils mittelfristig gehäuft auf, und auch Kombinationen dieser Zykluslängen sind erkennbar. Eine Ausnahme stellt der Winter dar, in dem nur wenige, aber ausgeprägte Zyklen die Temperatur dominieren. Die Temperatur im Winter ist daher zyklischer als in den übrigen Jahreszeiten.

Die Vielzahl gleich starker Zyklen im Frühling, Sommer und Herbst erschwert die Überprüfung von Ober- und Unterschwingungen. Jedoch konnte bei den stärksten Zyklen im Winter nachgewiesen werden, dass diese keine Ober- oder Unterschwingungen anderer vergleichbaren Zyklen darstellen. Die Problematik von Trends ist hier weniger relevant, da alle signifikanten Peaks im niedrigen Bereich nicht auffällig gross sind. Aliasing kann nicht festgestellt werden, somit könnten einige Frequenzen im Frequenzspektrum Alias-Frequenzen sein. Zudem ist unklar, in welchem Ausmass Leakage das Spektrum verzerrt hat. Daher ist die Interpretation mit Vorsicht zu geniessen, da verzerrte Spektren zu falschen Schlussfolgerungen führen könnten.

4.2.2 Niederschlagsdaten

Winter Im Frequenzspektrum des Winters sind einige gleich grosse Peaks zu erkennen, wobei ein Peak bei 0.26 Zyklen pro Jahr besonders heraussticht (vgl. Abbildung 3.9). Diese Peaks konzentrieren sich vor allem auf den niedrigen und mittleren Frequenzbereich. Betrachtet man diese Peaks nun als Zyklen, zeigt sich, dass der Niederschlag im Winter insbesondere durch mittelfristige Zyklen geprägt wird. Da im niedrigen Frequenzbereich auch eine beträchtliche Anzahl an Peaks vorhanden ist, lässt sich festhalten, dass langfristige Zyklen ebenfalls einen stärkeren Einfluss auf den Niederschlag ausüben. Dieser Einfluss ist jedoch weniger stark ausgeprägt als derjenige der mittelfristigen Zyklen.

Frühling Im Frequenzspektrum des Frühlings sind zahlreiche gleich grosse Peaks zu erkennen. Im Gegensatz zum Winter sind diese jedoch gleichmässig im Spektrum verteilt (vgl. Abbildung 3.10). Werden diese Peaks als Zyklen betrachtet, wird evident, dass der Niederschlag im Frühling von vielen Zyklen unterschiedlicher Länge in ähnlichem Ausmass beeinflusst wird. Somit lässt sich folgern, dass der Niederschlag im Frühling durch langfristige, mittelfristige und kurzfristige Zyklen gleichermaßen geprägt wird.

Sommer Im Frequenzspektrum des Sommers fällt der grösste Peak bei 0.42 Zyklen pro Jahr sofort auf. Zudem lassen sich weitere grössere Peaks im niedrigen und Hochfrequenzbereich finden (vgl. Abbildung 3.11). Die übrigen Peaks weisen ähnliche Amplituden auf und sind gleichmässig im Spektrum verteilt. Betrachtet man diese Peaks als Zyklen, wird ersichtlich, dass der Niederschlag im Sommer aufgrund des grössten Peaks besonders durch kurzfristige Zyklen geprägt wird. Allerdings prägen auch langfristige Zyklen den Niederschlag im Sommer in erheblichem Masse.

Herbst Im Frequenzspektrum des Herbstes sind viele ähnlich grosse Peaks zu beobachten. Die Verteilung dieser Peaks ist jedoch besonders: Sie sind vor allem im mittleren und Hochfrequenzbereich konzentriert, während im niedrigen Frequenzbereich nur wenige Peaks vorhanden sind (vgl. Abbildung

4.2 Identifikation und Interpretation der Zyklen

3.12). Werden diese Peaks als Zyklen betrachtet, kann geschlossen werden, dass der Niederschlag im Herbst vor allem durch kurz- und mittelfristige Zyklen geprägt wird.

Insgesamt lässt sich beim Niederschlag sagen, dass er durch viele gleich starke Zyklen geprägt wird. Einzelne stärkere Zyklen sind jedoch anzutreffen, insbesondere im Winter und im Sommer. Auch die Verteilung dieser Zyklen ist nicht immer gleichmässig: Zyklen treten teils langfristig, teils kurzfristig oder teils mittelfristig gehäuft auf, und auch Kombinationen dieser Zykluslängen sind erkennbar.

Durch die Vielzahl an Zyklen lässt sich die Existenz von Ober- und Unterschwingungen nur schwer überprüfen. Die Thematik der Trends ist hier nicht sehr präsent, da alle signifikanten Frequenzen im niedrigen Frequenzbereich nicht übermässig grosse Amplituden besitzen. Aliasing kann nach wie vor nicht festgestellt werden, es könnte daher sein, dass einige Frequenzen im Spektrum nur Alias-Frequenzen sind. Ebenso ist unbekannt, inwiefern Leakage das Frequenzspektrum verzerrt hat. Deshalb muss die Interpretation weiterhin mit Vorsicht genossen werden, da sie durch verzerrte Spektren zu falschen Schlussfolgerungen führen könnte.

4.2.3 NAO-Index

Winter Im Frequenzspektrum des Winters sind zahlreiche gleich starke Peaks erkennbar, die gleichmässig im Spektrum verteilt sind (vgl. Abbildung 3.17). Betrachtet man diese Peaks als Zyklen, lässt sich feststellen, dass der NAO-Index im Winter durch eine Vielzahl unterschiedlich langer Zyklen gleichermassen beeinflusst wird. Kurz-, mittel- und langfristige Zyklen prägen den NAO-Index im Winter folglich in ähnlichem Masse.

Frühling Auch im Frequenzspektrum des Frühlings sind zahlreiche gleich starke Peaks vorhanden. Die Verteilung dieser Peaks im Spektrum ist jedoch nicht gleichmässig: Der Grossteil der Peaks konzentriert sich auf Zyklen zwischen 8,3 und 3,2 Jahren, wobei einige wenige Peaks ausserhalb dieses Bereichs liegen (vgl. Abbildung 3.18). Betrachtet man diese als Zyklen, zeigt sich, dass der NAO-Index im Frühling vor allem durch mittelfristige Zyklen geprägt wird.

Sommer Im Frequenzspektrum des Sommers sind ebenfalls viele Peaks von ähnlicher Stärke zu beobachten. Diese treten vorwiegend im niedrigen und mittleren Frequenzbereich auf, während im Hochfrequenzbereich vergleichsweise wenige vergleichbare Peaks vorhanden sind (vgl. Abbildung 3.19). Betrachtet man die Peaks als Zyklen, lässt sich folgern, dass der NAO-Index im Sommer hauptsächlich durch mittel- und langfristige Zyklen geprägt wird.

Herbst Im Frequenzspektrum des Herbstes sind ebenfalls zahlreiche gleich starke Peaks zu finden. Im Vergleich zum mittleren und Hochfrequenzbereich sind im niedrigen Frequenzbereich wenige vergleichbare Peaks vorhanden (vgl. Abbildung 3.20). Betrachtet man diese Peaks als Zyklen, lässt sich schliessen, dass der NAO-Index im Herbst vor allem durch kurz- und mittelfristige Zyklen geprägt wird.

Insgesamt lässt sich sagen, dass der NAO-Index durch eine Vielzahl gleich starker Zyklen beeinflusst wird. Die Verteilung der Peaks und damit der Zyklen im Zeitbereich ist im Vergleich zu den Temperatur- und Niederschlagsdaten insgesamt gleichmässiger. Dennoch zeigen sich auch hier bestimmte Frequenzbereiche, die mit einer grösseren Anzahl an Peaks vertreten sind. Der NAO-Index wird somit teils durch kurzfristige, teils durch mittelfristige und teils durch langfristige Zyklen geprägt, wobei auch Kombinationen dieser Zykluslängen auftreten. Diese Prägung durch bestimmte Zykluslängen ist jedoch weniger prägnant als bei den Temperatur- und Niederschlagsdaten.

Aufgrund der Vielzahl an Zyklen lässt sich die Existenz von Ober- und Unterschwingungen nur schwer nachweisen. Die Thematik der Trends ist hier weniger ausgeprägt, da die signifikanten Peaks im nied-

rigen Frequenzbereich nicht übermässig gross sind. Aliasing kann weiterhin nicht festgestellt werden, sodass es durchaus möglich ist, dass einige Frequenzen im Spektrum Alias-Frequenzen sind. Ebenso ist unklar, inwiefern Leakage das Frequenzspektrum verzerrt hat. Daher muss die Interpretation weiterhin mit Vorsicht genossen werden, da sie möglicherweise durch verzerrte Spektren fehlerhafte Schlussfolgerungen enthält.

Tabelle 1 fasst die Resultate dieses Abschnitts zusammen und zeigt die identifizierten Zyklen der Temperatur- und Niederschlagsdaten sowie des NAO-Index für die verschiedenen Jahreszeiten.

Daten	Winter	Frühling	Sommer	Herbst
Temperatur	Prägung durch wenige, starke Zyklen; hauptsächlich kurzfristig und langfristig	Alle Zykluslängen (kurzfristig, mittelfristig und langfristig) prägen gleichermassen	Geprägt durch kurzfristige und langfristige Zyklen	Geprägt durch kurzfristige Zyklen
Niederschlag	Stärkste Prägung durch mittelfristige Zyklen; auch eher starke Prägung durch langfristige Zyklen	Alle Zykluslängen (kurzfristig, mittelfristig und langfristig) prägen gleichermassen	Stärkste Prägung durch kurzfristige Zyklen; auch eher starke Prägung durch langfristige Zyklen	Geprägt durch kurzfristige und mittelfristige Zyklen
NAO-Index	Alle Zykluslängen (kurzfristig, mittelfristig und langfristig) prägen gleichermassen	Geprägt durch mittelfristige Zyklen	Geprägt durch mittelfristige und langfristige Zyklen	Geprägt durch kurzfristige und mittelfristige Zyklen

Tabelle 1: Identifizierte Zyklen in den Frequenzspektren der Temperatur- und Niederschlagsdaten sowie des NAO-Index

4.3 Zusammenhang zwischen NAO und Klimadaten

In diesem Abschnitt werden die Leitfragen 2 und 3 beantwortet:

Inwiefern korrelieren die Frequenzspektren der Temperatur- und Niederschlagsdaten mit den Frequenzspektren des NAO-Index?

Wie lässt sich eine mögliche Korrelation erklären?

Die überlagerten Frequenzspektren wurden bereits im Abschnitt 3.4 dargestellt und bilden somit die Grundlage für die Beantwortung der zweiten Leitfrage. Konkret wird die allgemeine Korrelation der Frequenzspektren der Temperaturdaten und des NAO-Index verglichen mit derjenigen der Niederschlagsdaten und des NAO-Index. Zudem wird die Korrelation in den verschiedenen Jahreszeiten untersucht. Abschliessend erfolgt eine Analyse der Korrelation in den verschiedenen Frequenzbereichen. Gleichzeitig wird anhand der Erkenntnisse aus dem Abschnitt «Stand der Technik» die dritte Leitfrage beantwortet. Durch diese Analyse in diesem Abschnitt soll der vielseitige Einfluss der NAO auf die Klimadaten aufgezeigt werden. Die folgenden Erkenntnisse sollen jedoch mit Vorsicht genossen werden, da die Frequenzspektren aufgrund der Limitationen der FFT verzerrt sein könnten.

4.3.1 Temperatur- und Niederschlagsdaten als Ganze

Viele Paper, darunter eines von Hurrell [20], haben gezeigt, dass die NAO einen stärkeren Einfluss auf die Temperatur als auf den Niederschlag hat. Im Hinblick auf die Frequenzspektren bedeutet dies, dass die Frequenzspektren der Temperaturdaten und des NAO-Index stärker korrelieren als jene der Niederschlagsdaten und des NAO-Index. Diese stärkere Korrelation lässt sich auch intuitiv erklären, da Temperatur ein grossflächiges Phänomen darstellt, während Niederschlag ein eher lokales Ereignis ist. Diese grössere Korrelation ist in den erhaltenen Resultaten ersichtlich, auch wenn sie nicht immer eindeutig ist.

Am deutlichsten zeigt sich dieser stärkere Einfluss im Winter (vgl. Abbildungen 3.25 und 3.29), da die Frequenzspektren der Temperaturdaten und des NAO-Index in dieser Jahreszeit am meisten korrelieren.

Im Frühling ist der stärkere Einfluss weniger deutlich. Dennoch lässt sich auch hier eine stärkere Korrelation zwischen dem Frequenzspektrum des NAO-Index und dem der Temperaturdaten feststellen, im Vergleich zum Frequenzspektrum der Niederschlagsdaten (vgl. Abbildungen 3.26 und 3.30). Die Korrelationskoeffizienten⁹ der Frequenzspektren bestätigen dieses Phänomen: Der Korrelationskoeffizient zwischen den Frequenzspektren der Temperaturdaten und des NAO-Index beträgt 0.17, während er zwischen den Frequenzspektren des Niederschlagsdaten und des NAO-Index nur 0.12 beträgt. Beide Korrelationen sind jedoch schwach, da nur wenige Frequenzbereiche überhaupt eine Korrelation aufweisen.

Im Sommer und im Herbst sind vergleichende Aussagen zur Korrelation nicht möglich, da sowohl die Frequenzspektren der Temperaturdaten und des NAO-Index als auch jene der Niederschlagsdaten und des NAO-Index keinerlei nennenswerte Korrelation aufweisen – abgesehen von einzelnen, sehr kleinen Frequenzbereichen (vgl. Abbildungen 3.27 und 3.31 sowie Abbildungen 3.28 und 3.32).

Der in der Fachliteratur beschriebene stärkere Einfluss der NAO auf die Temperatur als auf den Niederschlag lässt sich auch in den Resultaten dieser Maturitätsarbeit erkennen, wenn auch nicht überall eindeutig und teilweise nur in kleinen Korrelationen. Es muss jedoch betont werden, dass durch die Fourier-Analyse dieser grössere Einfluss viel einfacher aufgezeigt werden konnte als durch den direkten Vergleich der Rohdaten.

4.3.2 Jahreszeiten

Zahlreiche Papers [17][18][19][20][21] haben gezeigt, dass die NAO im Winter das Wettergeschehen am stärksten beeinflusst. Für die Frequenzspektren bedeutet dies, dass die grösste Korrelation im Winter zu beobachten ist. Dies ist in den Resultaten dieser Maturitätsarbeit jedoch nur teilweise der Fall.

Bei den Frequenzspektren der Temperaturdaten und des NAO-Index ist die grösste Korrelation deutlich im Winter erkennbar (vgl. Abbildungen 3.25 bis 3.28), was darauf hinweist, dass die NAO in dieser Jahreszeit den grössten Einfluss auf die Temperatur hat.

Bei den Frequenzspektren der Niederschlagsdaten und des NAO-Index hingegen ist dies weniger klar ersichtlich, da der Frühling eine ähnlich starke Korrelation wie der Winter zeigt. (vgl. Abbildungen 3.29 und 3.30). Eine detaillierte Betrachtung der Korrelationskoeffizienten beschreibt diese Zusammenhänge präziser: Die Frequenzspektren im Winter weisen einen Korrelationskoeffizienten von -0.1 auf, während die Frequenzspektren im Frühling einen Korrelationskoeffizienten von 0.12 zeigen. Diese negative,

⁹Der Korrelationskoeffizient beschreibt das Mass der Korrelation zwischen zwei Datensätzen. Er reicht von -1 (perfekte negative Korrelation) über 0 (keine Korrelation) bis 1 (perfekte positive Korrelation). [1]

jedoch geringe Korrelation im Winter ist bemerkenswert und lässt sich wie folgt erklären: Auch wenn einzelne Frequenzbereiche im Winter korrelieren, überwiegen die Frequenzbereiche, in denen eine negative Korrelation vorliegt. Das bedeutet, dass bei bestimmten Frequenzen entweder der NAO-Index oder die Niederschlagsdaten einen Peak aufweisen, während das andere eine vernachlässigbar kleine Amplitude hat. Dadurch ergibt sich insgesamt ein negativer Korrelationskoeffizient für den Winter.

Die Interpretation dieses negativen Korrelationskoeffizienten bei Frequenzspektren ist im Vergleich zu den Rohdaten komplexer. Eine mögliche Erklärung könnte sein, dass ein Zyklus im NAO-Index einen Zyklus von ähnlicher Länge in den Niederschlagsdaten unterdrückt: Bei einem stark positiven oder stark negativen NAO-Index sind die Niederschläge wegen der extremen Westwinde bzw. des Osteuropahochs instabil [2]. Bei einem NAO-Index nahe null sind die Niederschläge stabiler [2] und könnten deshalb stabilere Zyklen aufweisen. Weitere Untersuchungen wären nötig, um diese kleine, aber negative Korrelation zu überprüfen. Aussagen über eine potentiell grösste Korrelation im Winter bei den Niederschlagsdaten können daher mit den erhaltenen Resultaten nicht getroffen werden.

Die Resultate dieser Maturitätsarbeit weichen teilweise von der Fachliteratur ab, die im Winter generell den grössten Einfluss der NAO auf die Temperatur sowie den Niederschlag feststellt. Während bei den Frequenzspektren der Temperaturdaten und des NAO-Index die grösste Korrelation im Winter zu sehen ist, lässt sich diese Aussage bei den Frequenzspektren der Niederschlagsdaten und des NAO-Index nicht tätigen.

4.3.3 Frequenzbereiche

Ein berühmtes Paper von Hurrell [20] zeigt, dass die NAO neben kurzfristigen Schwankungen auch von langfristigen, dekadischen Zyklen beeinflusst wird. Hinweise darauf, ob nun die kurz-, mittel- oder langfristigen Zyklen einen stärkeren Einfluss auf die Klimadaten ausüben, d.h. die Frequenzspektren in diesen Frequenzbereichen am meisten korrelieren, liefert die Fachliteratur nicht. Aufgrund dessen sowie des nachgewiesenen und erforschten Vorhandenseins von Zyklen verschiedener Längen wäre es daher plausibel anzunehmen, dass in den verschiedenen Frequenzbereichen unterschiedlich starke Korrelationen auftreten können.

In den Resultaten dieser Maturitätsarbeit zeigt sich, dass Korrelation über alle Frequenzbereiche hinweg auftritt. Allerdings korrelieren die niedrigen Frequenzbereiche, die langfristigen Zyklen entsprechen, insgesamt stärker als die anderen Frequenzbereiche (vgl. Abbildungen 3.25 bis 3.32). Besonders deutlich wird dies bei den Frequenzspektren der Temperaturdaten und des NAO-Index im Winter, wo bis zu 0.22 Zyklen pro Jahr eine starke Korrelation zu beobachten ist, die jedoch danach abrupt endet. In vereinzelten Fällen, wie beispielsweise in den Abbildungen 3.29 und 3.30, ist jedoch auch in anderen Frequenzbereichen eine vergleichbare oder sogar stärkere Korrelation als in den niedrigen Frequenzbereichen festzustellen.

Somit zeigt sich, dass die Frequenzspektren des NAO-Index und der Temperaturdaten bzw. der Niederschlagsdaten tendenziell in den niedrigen Frequenzbereichen die grösste Korrelation aufweisen. Im klimatologischen Kontext bedeutet dies, dass die langfristigen Zyklen der NAO einen grösseren Einfluss auf die Temperatur bzw. den Niederschlag ausüben als die kurz- und mittelfristigen Zyklen.

4.4 Ausblick

Im Hinblick auf den Klimawandel wäre es spannend zu sehen, wie sich die Frequenzspektren bzw. die Zyklen im Laufe der Zeit verändert haben. Dies lässt sich am besten mit einem sogenannten Spektrogramm darstellen, das die Amplituden im Frequenzspektrum über die Zeit hinweg anzeigt. Dies ist möglich durch die Short-Time Fourier-Transformation (STFT), die die Daten in einzelne Zeitfenster unterteilt und diese dann wie bei der FFT transformiert. Das Spektrogramm visualisiert die Resultate der STFT. [1]

Mit einem solchen Spektrogramm könnte analysiert werden, ob und inwiefern sich die dominanten Zyklen in den Klimadaten sowie im NAO-Index verändert haben. Abbildung 4.1 zeigt ein Beispiel eines solchen Spektrogramms.

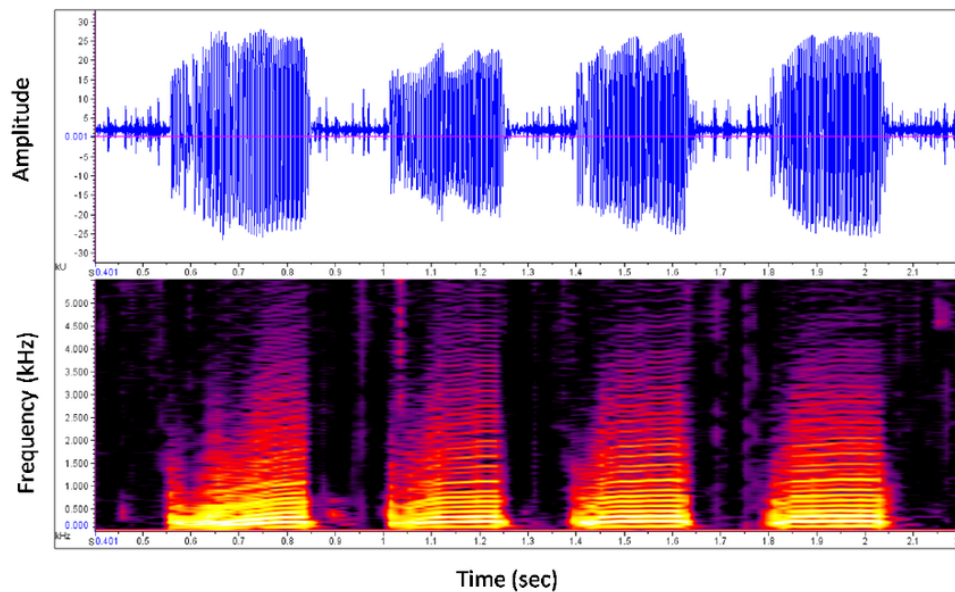


Abb. 4.1: Beispiel eines Spektrogramms: Oben sind die originalen Daten - in diesem Fall Schallwellen - dargestellt, unten die Amplituden einzelner Frequenzen über die Zeit. Hellere Stellen entsprechen höheren Amplituden. [40]

Ebenfalls denkbar wäre die Anwendung der Wavelet-Analyse auf die Daten. Die Wavelet-Analyse ist der STFT ähnlich, verwendet jedoch ein variables Zeitfenster. Dadurch wird eine sehr hohe Auflösung im Spektrum erzielt, was die Analyse noch genauer macht. [11]

Neben methodischen Alternativen könnten auch Klimadaten von weiteren Standorten ausserhalb von Zürich einbezogen werden, um den regionalen Einfluss der NAO besser zu untersuchen und das Verständnis ihres Einflusses zu erweitern. Geeignete Standorte wären Messstationen in Skandinavien, wo der Einfluss der NAO stärker ausgeprägt ist als in Zürich [2]. Denkbar wäre auch die Analyse weiterer klimatologischer Phänomene, um die komplexen Muster in den Klimadaten besser zu verstehen.

4.5 Schlusswort

Die FFT ist ein zentraler Algorithmus, der nicht nur in der Signalverarbeitung, sondern auch in der Analyse von Klimadaten eine wichtige Rolle spielt. Mit präzisen mathematischen Methoden lassen sich unsichtbare Zyklen und Korrelationen in den Daten aufdecken.

Diese Maturitätsarbeit zeigt, wie mithilfe der FFT Frequenzspektren von Klimadaten erstellt werden können, während gleichzeitig die Limitationen dieser Methode berücksichtigt werden. Zudem wird erläutert, wie anhand dieser Spektren Zyklen identifiziert werden können.

Weiter untersucht diese Arbeit, inwiefern Temperatur und Niederschlag durch die NAO beeinflusst werden, basierend auf ihren Frequenzspektren. Die Ergebnisse stimmen weitgehend mit der Fachliteratur überein: Die Temperatur wird insgesamt stärker durch die NAO geprägt als der Niederschlag. Es zeigt sich auch, dass die NAO im Winter den grössten Einfluss auf das Wettergeschehen ausübt. Ein weniger erforschtes Gebiet in der Fachliteratur ist der Einfluss der NAO auf Klimadaten in verschiedenen Zykluslängen bzw. die Korrelation in unterschiedlichen Frequenzbereichen. Die Resultate dieser Maturitätsarbeit zeigen, dass die NAO bei langfristigen Zyklen einen tendenziell grösseren Einfluss auf die Klimadaten hat als bei kurzfristigen Zyklen.

Die Arbeit an diesem Thema war nicht immer einfach. Besonders die Komplexität der Fourier-Analyse und die Vielzahl der zu berücksichtigenden Faktoren stellten eine echte Herausforderung dar. Zudem musste ich mich intensiv in die Programmiersprache MATLAB einarbeiten, um die Fourier-Analyse überhaupt durchführen zu können. Diese tiefe Auseinandersetzung mit der Thematik hat mir nicht nur wertvolle technische Fähigkeiten vermittelt, sondern auch meine Problemlösungsfähigkeiten geschärft. Trotz dieser Schwierigkeiten bin ich stolz auf das Erreichte und die Fortschritte, die ich während des gesamten Prozesses gemacht habe.

Im Verlauf des Arbeitsprozesses habe ich nicht nur ein tieferes Verständnis der Fourier-Analyse und ihrer Anwendung gewonnen, sondern auch erfahren, wie vielseitig mathematische Werkzeuge bei der Analyse komplexer Datensätze sein können. Diese Erkenntnisse haben meinen Blick auf die Verbindung zwischen Mathematik und Klimatologie entscheidend erweitert.

Abschliessend hoffe ich, dass die Leserinnen und Leser durch diese Arbeit ein tieferes Verständnis des Wettergeschehens erhalten haben und dass ich bei künftigen Maturanden das Interesse an diesem faszinierenden und komplexen Thema wecken konnte.

A Matlab-Codes

A.1 Temperaturdaten und NAO-Index

Um den Vergleich der Frequenzspektren der Temperaturdaten und des NAO-Index zu vereinfachen, wurden alle Berechnungen bezüglich dieser Datensätze in einem Code durchgeführt. Dieser ist hier abgebildet:

```

1  % Temperatur nach Jahreszeit (% fuer die Auswahl der vorhandenen Optionen)
2
3  % Temperaturdaten in einen Zeilenvektor umwandeln
4
5      temperatur = tempma';
6
7  % Jahreszeitskala (1864 bis 2022 fuer Winter bzw. 2023 fuer die anderen Jahreszeiten)
8
9      Jahre = 1863:2023;
10
11 % Laenge der ganzen Temperaturdaten
12
13     N_temp = length(temperatur);
14
15 % Berechnung der Mittelwerte einer Saison (1 Saison = 3 Monate)
16
17     jahre_fuersaison = floor(N_temp / 12); % Laenge der Daten in ganzen Jahren
18     temp_fuersaison = temperatur(1:jahre_fuersaison * 12); % Temperaturdaten extrahieren
19     temp_matrix = reshape(temp_fuersaison, 12, jahre_fuersaison); % Temperatur-Matrix
20                                     erstellen
21
22     temp = mean(temp_matrix(9:11, :), 1); % Die gesuchte Jahreszeit auswaehlen, z.B.
23                                     9:11 f r September bis November
24
25 % Falls zeilenuebergreifende Monate benutzt werden
26
27     temp = zeros(1, jahre_fuersaison - 1);
28     for i = 1:(jahre_fuersaison - 1)
29         temp(i) = mean([temp_matrix(12, i), temp_matrix(1, i + 1), temp_matrix(2, i +
30                                     1)]);
31     end
32
33 % Laenge der Saison-Daten und moegliche Zero-Padding Laenge
34
35     N_t = length(temp);
36     N_t2 = 256; % Mit Zero-Padding spaeter
37     N_t2 = N_t; % Ohne Zero-Padding spaeter
38
39 % Mittelwert entfernen
40
41     temp_ohne_mean = temp - mean(temp); % Mittelwert entfernen
42     temp_ohne_mean = temp; % Ohne Mittelwert entfernen
43
44 % Detrend
45
46     temp_detrend = detrend(temp_ohne_mean); % Trend entfernen mit detrend
47     temp_detrend = movmean(temp_ohne_mean, n) % Trend entfernen mit gleitendem Mittel
48                                     ueber n Jahre
49     temp_detrend = smoothdata(temp_ohne_mean) % Trend entfernen durch Glaettung
50     temp_detrend = temp_ohne_mean; % Trend nicht entfernen
51
52 % Window zur Reduzierung von Leakage
53
54     % Hanning-Window
55     Window_temp = hann(N_t)' .* N_t / sum(hann(N_t));
56     % Window mit Skalierung fuer Energieerhalt;
57
58     % Hamming-Window
59     Window_temp = hamming(N_t)' .* N_t / sum(hann(N_t));
60     % Window mit Skalierung fuer Energieerhalt;

```

```

60     % Kein Window
61     Window_temp = ones(N_t,1);
62
63     temp_window = temp_detrend .* Window_temp(1, 1:N_t);
64
65
66 % Plots
67
68 % Plot der saisonalen Mittelwerte
69
70     figure;
71     plot(Jahre, temp)
72     xlabel('Jahre ab 1864')
73     ylabel('Temperatur in C ')
74     title('Durchschnittliche Temperatur im Herbst (Monate SON) von 1864 bis
75           2023','FontSize', 13)
76     xlim([1864, 2022])
77
78     hold on
79     plot(Jahre, movmean(temp, 10), 'r')
80     hold off
81
82     legend('Temperaturverlauf', 'geglaettetes Mittel des Temperaturverlaufs')
83     exportgraphics(gcf,'h_temp.pdf','ContentType','vector')
84
85 % FFT und Plot der Amplitude
86
87     temp_fft = fft(temp_window,N_t2); % FFT mit/ohne Zero-Padding
88
89     figure;
90     plot(abs(temp_fft))
91     xlabel('Samples')
92     ylabel('Amplitude')
93     title('Fouriertransformierte der Temperaturdaten im Herbst (Monate
94           SON)','FontSize', 13)
95     xlim([0, 256])
96     ylim([0,5.5])
97     exportgraphics(gcf,'h_temp_fouriertransformierte.pdf','ContentType','vector')
98
99 % Plot des angepassten Frequenzspektrums mit halbem Spektrum, korrekten Frequenzwerten
100    und normierten Amplituden
101
102    temp_oneSide = abs(temp_fft(1:N_t2/2)) * (1/(N_t2/2)); % Normierung und Extraktion
103    vom halben Spektrum
104    freq_temp = (1:N_t2/2)/(N_t2); % Erstellung der korrekten Frequenzwerte
105
106    figure;
107    plot(freq_temp,temp_oneSide)
108    xlabel('Frequenz/Zyklen pro Jahr')
109    ylabel('Amplitude')
110    title('Frequenzspektrum der Temperaturdaten im Herbst (Monate SON)','FontSize', 13)
111    xlim([0,0.5])
112    ylim([0, 0.275])
113    exportgraphics(gcf,'h_temp_fft.pdf','ContentType','vector')
114
115 % NAO nach Jahreszeit
116
117 % NAO-Daten in einen Zeilenvektor umwandeln
118
119     nao = naostationseasonal(1:158, 10); % Die Zahl nach dem Komma legt die Saison fest
120     (z.B. 10 -> Monate September, Oktober, November)
121     nao = nao'; % Transponieren des NAO-Vektors in eine Zeile
122
123 % Laenge der gesamten NAO-Daten und moegliche Zero-Padding-Laenge
124
125     N_nao = length(nao);
126     N_nao2 = 256; % Mit Zero-Padding spaeter
127     N_nao2 = N_nao % Ohne Zero-Padding spaeter

```

A.1 Temperaturdaten und NAO-Index

```

127
128 % Jahreszeitskala (1865 bis 2022)
129
130     Jahre_nao = 1865:2022;
131
132 % Mittelwert entfernen
133
134     nao_ohne_mean = nao - mean(nao); % Mittelwert entfernen
135     nao_ohne_mean = nao % Mittelwert nicht entfernen
136
137
138 % Detrend
139
140     nao_detrend = detrend(nao_ohne_mean); % Trend entfernen mit detrend
141     nao_detrend = movmean(nao_ohne_mean, n) % Trend entfernen mit gleitendem Mittel
142         ueber n Jahre
143     nao_detrend = smoothdata(nao_ohne_mean) % Trend entfernen durch Glaettung
144     nao_detrend = nao_ohne_mean; % Trend nicht entfernen
145
146 % Window
147
148     % Hanning-Window
149     Window_nao = hann(N_nao)' .* N_nao / sum(hann(N_nao));
150     % Window mit Skalierung fuer Energieerhalt;
151
152     % Hamming-Window
153     Window_nao = hamming(N_nao)' .* N_nao / sum(hamming(N_nao));
154     % Window mit Skalierung fuer Energieerhalt;
155
156     % Kein Window
157     Window_nao = ones(N_nao);
158
159     nao_window = nao_detrend .* Window_nao(1,1:N_nao);
160
161 % Plots
162 % Plot des NAO Index
163
164     figure;
165     plot(Jahre_nao, nao)
166     xlabel('Jahre ab 1865')
167     title('NAO Index im Herbst (Monate SON) von 1865 bis 2022','FontSize', 13)
168     xlim([1865,2022])
169     ylim([-6,5])
170     exportgraphics(gcf,'h_nao.pdf','ContentType','vector')
171
172 % FFT und Plot der Fouriertransformierten
173
174     nao_fft = fft(nao_window,N_nao2); % FFT mit/ohne Zero-Padding
175
176     figure;
177     plot(abs(nao_fft));
178     xlabel('Samples')
179     ylabel('Amplitude')
180     title('Fouriertransformierte des NAO-Index im Herbst (Monate SON)','FontSize', 13)
181     xlim([0,256])
182     ylim([0,4.25])
183     exportgraphics(gcf,'h_nao_fouriertransformierte.pdf','ContentType','vector')
184
185 % Plot des angepassten Frequenzspektrums mit halbem Spektrum, korrekten
186 % Frequenzwerten und normierten Amplituden
187
188     nao_oneSide = abs(nao_fft(1:N_nao2/2)) * (1/(N_nao2/2)); % Extraktion vom halben
189     % Spektrum sowie Normierung
190     freq_nao = (1:N_nao2/2)/(N_nao2); % Erstellung der korrekten Frequenzwerte
191
192     figure;
193     plot(freq_nao,nao_oneSide)
194     xlabel('Frequenz/Zyklen pro Jahr')
195     ylabel('Amplitude')
196     title('Frequenzspektrum des NAO Index im Herbst (Monate SON)','FontSize', 13)
197     xlim([0,0.5])

```

```

198     ylim([0,0.45])
199     exportgraphics(gcf,'h_ao_fft.pdf','ContentType','vector')
200
201 % Plot vom Vergleich der Frequenzen
202
203     nao_vergleichsfaktor = sum(temp_oneSide) ./ sum(nao_oneSide);
204
205     figure;
206     plot(freq_temp,abs(temp_oneSide))
207     xlabel('Frequenz/Zyklen pro Jahr')
208     ylabel('Amplitude')
209     title('Frequenzspektren der Temperaturdaten und des NAO-Index im Herbst (Monate
        SON)','FontSize', 13)
210     xlim([0,0.5])
211     ylim([0,0.275])
212
213     hold on
214     plot(freq_nao,(nao_vergleichsfaktor .* abs(nao_oneSide)),'-r')
215     hold off
216
217     legend('Temperaturdaten','NAO-Index')
218     exportgraphics(gcf,'h_temp_nao_fft.pdf','ContentType','vector')
219
220
221 % Signifikanztest NAO
222
223 % Power-Spektrum erstellen
224
225     power_spektrum_nao = abs(nao_fft).^2 / N_nao2;
226     power_spektrum_nao = power_spektrum_nao(1:N_nao2/2);
227
228 % Nullmodell erstellen mit Red Noise
229
230     iterationen = 1000; % Anzahl der Simulationen fuer das Nullmodell
231     null_modell_nao = zeros(iterationen, N_nao2/2);
232
233 % Erstellung des Power-Spektrums vom Rauschen (Red Noise)
234
235     for i = 1:iterationen
236         rauschen_nao = rednoise(1, N_nao2); % Simulation des Red Noise, Funktion von
            rednoise() in anderem File
237         rauschen_fft_nao = fft(rauschen_nao);
238         power_spektrum_rauschen_nao = abs(rauschen_fft_nao).^2 / N_nao2; %
            Power-Spektrum des Red Noise erstellen
239         vergleichsfaktor_power_nao = sum(power_spektrum_nao) ./
            sum(power_spektrum_rauschen_nao); % Faktor zur Anpassung an dasselbe
            Energieniveau
240         power_spektrum_rauschen_nao = vergleichsfaktor_power_nao .*
            power_spektrum_rauschen_nao;
241         null_modell_nao(i, :) = power_spektrum_rauschen_nao(1:N_nao2/2);
242     end
243
244 % Berechnung des 95%-Konfidenzintervall
245
246     perzentil_95_nao = prctile(null_modell_nao, 95);
247
248 % Berechnung der p-Werte
249
250
251     p_werte_nao = zeros(1, N_nao2/2);
252
253     for j = 1:N_nao2/2
254         p_werte_nao(j) = sum(null_modell_nao(:, j) >= power_spektrum_nao(j)) /
            iterationen;
255     end
256
257 % Signifikante Frequenzen markieren (basierend auf dem p-Wert)
258
259     signifikante_frequenzen_nao = find(p_werte_nao < 0.05);
260
261 % Plotten der signifikanten Frequenzen
262

```

```

263 figure;
264 plot(freq_nao, power_spektrum_nao)
265 xlabel('Frequenz/Zyklen pro Jahr')
266 ylabel('Power')
267 title('Signifikante Frequenzen des NAO-Index im Herbst (Monate SON)', 'FontSize', 13)
268
269 hold on
270 plot(freq_nao, perzentil_95_nao, '-r') % 95%-Konfidenzintervall
271 scatter(freq_nao(signifikante_frequenzen_nao),
        power_spektrum_nao(signifikante_frequenzen_nao), 'g', 'filled') % Signifikante
        Frequenzen des NAO-Index
272 hold off
273
274 legend('Power-Spektrum', '95%-Signifikanzniveau', 'Signifikante Frequenzen')
275 xlim([0,0.5])
276 ylim([0,12])
277 exportgraphics(gcf, 'h_nao_sign_freq.pdf', 'ContentType', 'vector')
278
279
280
281 % Signifikanztest Temperatur
282
283 % Power-Spektrum erstellen
284 power_spektrum_temp = abs(temp_fft).^2 / N_t2;
285 power_spektrum_temp = power_spektrum_temp(1:N_t2/2);
286
287
288 % Nullmodell erstellen mit Red Noise
289 iterationen = 1000; % Anzahl der Iterationen fuer das Nullmodell
290 null_modell_temp = zeros(iterationen, N_t2/2);
291
292 % Erstellung des Power-Spektrums vom Rauschen (Red Noise)
293 for i = 1:iterationen
294     rauschen_temp = rednoise(1, N_t2); % Simulation des Red Noise, Funktion von
        rednoise() in anderem File
295     rauschen_fft_temp = fft(rauschen_temp);
296     power_spektrum_rauschen_temp = abs(rauschen_fft_temp).^2 / N_t2; %
        Power-Spektrum des Red Noise erstellen
297     vergleichsfaktor_power_temp = sum(power_spektrum_temp) ./
        sum(power_spektrum_rauschen_temp); % Faktor zur Anpassung an dasselbe
        Energieniveau
298     power_spektrum_rauschen_temp = vergleichsfaktor_power_temp .*
        power_spektrum_rauschen_temp;
299     null_modell_temp(i, :) = power_spektrum_rauschen_temp(1:N_t2/2);
300 end
301
302 % Berechnung des 95%-Konfidenzintervalls
303
304 perzentil_95_temp = prctile(null_modell_temp, 95);
305
306 % Berechnung der p-Werte
307
308 p_werte_temp = zeros(1, N_t2/2);
309
310 for j = 1:N_t2/2
311     p_werte_temp(j) = sum(null_modell_temp(:, j) >= power_spektrum_temp(j)) /
        iterationen;
312 end
313
314 % Signifikante Frequenzen markieren (basierend auf dem p-Wert)
315
316 signifikante_frequenzen_temp = find(p_werte_temp < 0.05);
317
318 % Plotten der signifikanten Frequenzen
319
320 figure;
321 plot(freq_temp, power_spektrum_temp)
322 xlabel('Frequenz (Zyklen pro Jahr)')
323 ylabel('Power')
324 title('Signifikante Frequenzen der Temperaturdaten im Herbst (Monate
        SON)', 'FontSize', 13)
325 xlim([0,0.5])

```



```

326     ylim([0,5.25])
327
328     hold on
329     scatter(freq_temp(signifikante_frequenzen_temp),
              power_spektrum_temp(signifikante_frequenzen_temp), 'g', 'filled') % Signifikante
              Frequenzen der Temperatur
330     plot(freq_temp, perzentil_95_temp, '-r') % 95%-Konfidenzintervall
331     hold off
332
333     legend('Power-Spektrum', 'Signifikante Frequenzen', '95%-Schwelle der
              Nullhypothese')
334     exportgraphics(gcf,'h_temp_sign_freq.pdf','ContentType','vector')

```

A.2 Niederschlagsdaten und NAO-Index

Um den Vergleich der Frequenzspektren der Niederschlagsdaten und des NAO-Index zu vereinfachen, wurden alle Berechnungen bezüglich dieser Datensätze in einem Code durchgeführt. Dieser ist hier abgebildet:

```

1  % Niederschlag nach Jahreszeit (% fuer die Auswahl der vorhanden Optionen)
2
3  % Niederschlagsdaten in einen Zeilenvektor umwandeln
4
5      niederschlag = niedma';
6
7  % Jahreszeitskala (1864 bis 2022 fuer Winter bzw. 2023 fuer die anderen Jahreszeiten)
8
9      Jahre = 1863:2023;
10
11 % Laenge der ganzen Niederschlagsdatendaten
12
13     N_nied = length(niederschlag);
14
15 % Berechnung der Mittelwerte einer Saison (1 Saison = 3 Monate)
16
17     jahre_fuersaison = floor(N_nied / 12); % Laenge der Daten in ganzen Jahren
18     nied_fuersaison = niederschlag(1:jahre_fuersaison * 12); % Niederschlagsdaten
              extrahieren
19     nied_matrix = reshape(nied_fuersaison, 12, jahre_fuersaison); % Niederschlags -
              Matrix erstellen
20
21     nied = mean(nied_matrix(9:11, :), 1); % Gew nschte Monate ausw hlen , z.B. 9:11
              f r September bis Oktober
22
23 % Falls zeilenuebergreifende Monate benutzt werden
24
25     nied = zeros(1,jahre_fuersaison - 1);
26     for i = 1:(jahre_fuersaison - 1)
27         nied(i) = mean([nied_matrix(12, i), nied_matrix(1, i + 1), nied_matrix(2, i +
              1)]);
28     end
29
30 % Laenge der Saison-Daten und moegliche Zero-Padding Laenge
31
32     N_n = length(nied);
33     N_n2 = 256; % Mit Zero-Padding spaeter
34     N_n2 = N_n; % Ohne Zero-Padding spaeter
35
36 % Mittelwert entfernen
37
38     nied_ohne_mean = nied - mean(nied); % Mittelwert entfernen
39     nied_ohne_mean = nied % Ohne Mittelwert entfernen
40
41 % Detrend
42
43     nied_detrend = detrend(nied_ohne_mean); % Trend entfernen mit detrend
44     nied_detrend = movmean(nied_ohne_mean, n) % Trend entfernen mit gleitendem Mittel
              ueber n Jahre
45     nied_detrend = smoothdata(nied_ohne_mean) % Trend entfernen durch Glaettung
46     nied_detrend = nied_ohne_mean; % Trend nicht entfernen

```

```

47
48 % Window zur Reduzierung von Leakage
49
50 % Hanning-Window
51 Window_nied = hann(N_n)' .* N_n / sum(hann(N_n));
52 % Window mit Skalierung fuer Energieerhalt;
53
54 % Hamming-Window
55 Window_nied = hamming(N_n)' .* N_n / sum(hamming(N_n));
56 % Window mit Skalierung fuer Energieerhalt;
57
58 % Kein Window
59 Window_nao = ones(N_n);
60
61 nied_window = nied_detrend.* Window_nied(1,1:N_n);
62
63
64 % Plots
65
66 % Plot der saisonalen Mittelwerte
67
68 figure;
69 plot(Jahre, nied)
70 xlabel('Jahre ab 1864')
71 ylabel('Niederschlag in mm')
72 title('Durchschnittlicher Niederschlag im Herbst (Monate SON) von 1864 bis
2023','FontSize', 13)
73 xlim([1864,2022])
74
75 hold on
76 plot(Jahre, movmean(nied, 10), 'r')
77 hold off
78
79 legend('Verlauf des durchschnittlichen Niederschlags', 'geglattetes Mittel des
Verlaufs')
80 exportgraphics(gcf,'h_nied.pdf','ContentType','vector')
81
82 % FFT und Plot der Amplitude
83
84 nied_fft = fft(nied_window,N_n2); % FFT mit/ohne Zero-Padding
85
86 figure;
87 plot(abs(nied_fft));
88 xlabel('Samples')
89 ylabel('Amplitude')
90 title('Fouriertransformierte der Niederschlagsdaten im Herbst (Monate
SON)','FontSize', 13)
91 xlim([1,256])
92 ylim([0,12])
93 exportgraphics(gcf,'h_nied_fouriertransformierte.pdf','ContentType','vector')
94
95 % Plot des angepassten Frequenzspektrums mit halbem Spektrum, korrekten
96 % Frequenzwerten und normierten Amplituden
97
98 nied_oneSide = abs(nied_fft(1:N_n2/2)) * (1/(N_n2/2)); % Normierung und Extraktion
vom halben Spektrum
99 freq_nied = (1:N_n2/2)/(N_n2); % Erstellung der korrekten Frequenzwerte
100
101 figure;
102 plot(freq_nied, nied_oneSide)
103 xlabel('Frequenz/Zyklen pro Jahr')
104 ylabel('Amplitude')
105 title('Frequenzspektrum der Niederschlagsdaten im Herbst (Monate SON)','FontSize',
13)
106 xlim([0,0.5])
107 ylim([0,7.25])
108 exportgraphics(gcf,'h_nied_fft.pdf','ContentType','vector')
109
110
111
112 % NAO nach Jahreszeit
113 siehe "A.1 Temperaturdaten und NAO" fuer den Code-Abschnitt, welcher nur die NAO

```

```

    betrifft
114
115 % Plot vom Vergleich der Frequenzen
116
117     nao_vergleichsfaktor = sum(nied_oneSide) ./ sum(nao_oneSide);
118
119     figure;
120     plot(freq_nied,abs(nied_oneSide))
121     xlabel('Frequenz/Zyklen pro Jahr')
122     ylabel('Amplitude')
123     title('Frequenzspektren der Niederschlagsdaten und des NAO-Index im Herbst
        (Monate SON)','FontSize', 13)
124
125     hold on
126     plot(freq_nao,(nao_vergleichsfaktor .* abs(nao_oneSide)),'-r')
127     hold off
128
129     legend('Niederschlagsdaten','NAO-Index')
130     xlim([0,0.5])
131     ylim([0,7.25])
132     exportgraphics(gcf,'h_nied_nao_fft.pdf','ContentType','vector')
133
134
135 % Signifikanztest Niederschlag
136
137 % Power-Spektrum erstellen
138     power_spektrum_nied = abs(nied_fft).^2 / N_n2;
139     power_spektrum_nied = power_spektrum_nied(1:N_n2/2);
140
141 % Nullmodell erstellen mit Red Noise
142     iterationen = 1000; % Anzahl der Simulationen fuer das Nullmodell
143     null_modell_nied = zeros(iterationen, N_n2/2);
144
145 % Erstellung des Power-Spektrums vom Rauschen (Red Noise)
146     for i = 1:iterationen
147         rauschen_nied = rednoise(1, N_n2); % Simulation des Red Noise, Funktion von
            rednoise() in anderem File
148         rauschen_fft_nied = fft(rauschen_nied);
149         power_spektrum_rauschen_nied = abs(rauschen_fft_nied).^2 / N_n2; %
            Power-Spektrum des Red Noise erstellen
150         vergleichsfaktor_power_nied = sum(power_spektrum_nied) ./
            sum(power_spektrum_rauschen_nied); % Faktor zur Anpassung an dasselbe
            Energieniveau
151         power_spektrum_rauschen_nied = vergleichsfaktor_power_nied .*
            power_spektrum_rauschen_nied;
152         null_modell_nied(i, :) = power_spektrum_rauschen_nied(1:N_n2/2);
153     end
154
155 % Berechnung des 95%-Konfidenzintervalls
156
157     perzentil_95_nied = prctile(null_modell_nied, 95);
158
159 % Berechnung der p-Werte
160
161     p_werte_nied = zeros(1, N_n2/2);
162
163     for j = 1:N_n2/2
164         p_werte_nied(j) = sum(null_modell_nied(:, j) >= power_spektrum_nied(j)) /
            iterationen;
165     end
166
167 % Signifikante Frequenzen markieren (basierend auf dem p-Wert)
168
169     signifikante_frequenzen_nied = find(p_werte_nied < 0.05);
170
171 % Plotten der signifikanten Frequenzen
172
173     figure;
174     plot(freq_nied, power_spektrum_nied)
175     xlabel('Frequenz (Zyklen pro Jahr)')
176     ylabel('Power')
177     title('Signifikante Frequenzen der Niederschlagsdaten im Herbst (Monate

```

```
178         SON'),'FontSize', 13)
179
180     hold on
181     scatter(freq_nied(signifikante_frequenzen_nied),
182             power_spektrum_nied(signifikante_frequenzen_nied), 'g', 'filled') % Signifikante
183             Frequenzen des Niederschlags
184     plot(freq_nied, perzentil_95_nied, '-r') % 95%-Konfidenzintervall
185     hold off
186
187     legend('Power-Spektrum', 'Signifikante Frequenzen', '95%-Signifikanzniveau')
188     xlim([0,0.5])
189     ylim([0,3250])
190     exportgraphics(gcf,'h_nied_sign_freq.pdf','ContentType','vector')
```

B Darstellungen der Rohdaten

B.1 Temperaturdaten

Die Abbildungen B.1 bis B.4 zeigen den Verlauf der durchschnittlichen Temperatur in den jeweiligen Jahreszeiten Winter, Frühling, Sommer und Herbst. Zur Verdeutlichung der enthaltenen Trends wurde ein geglättetes Mittel hinzugefügt, welches rot in den Abbildungen erscheint.

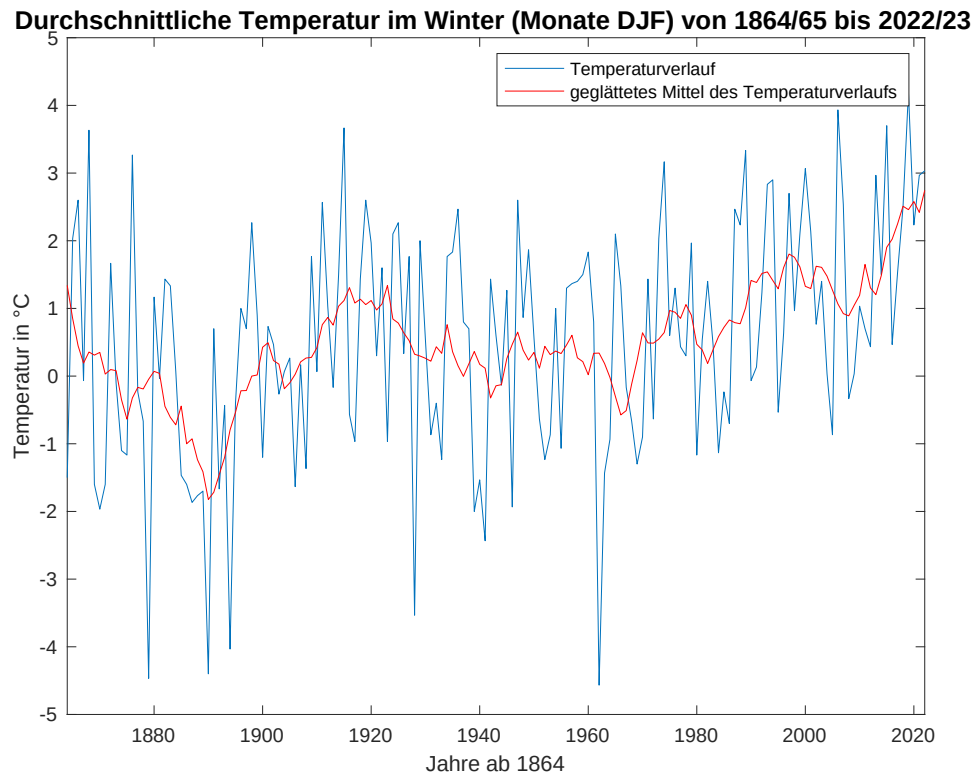


Abb. B.1: Durchschnittliche Wintertemperatur (Monate Dezember, Januar, Februar) von 1864/65 bis 2022/23.

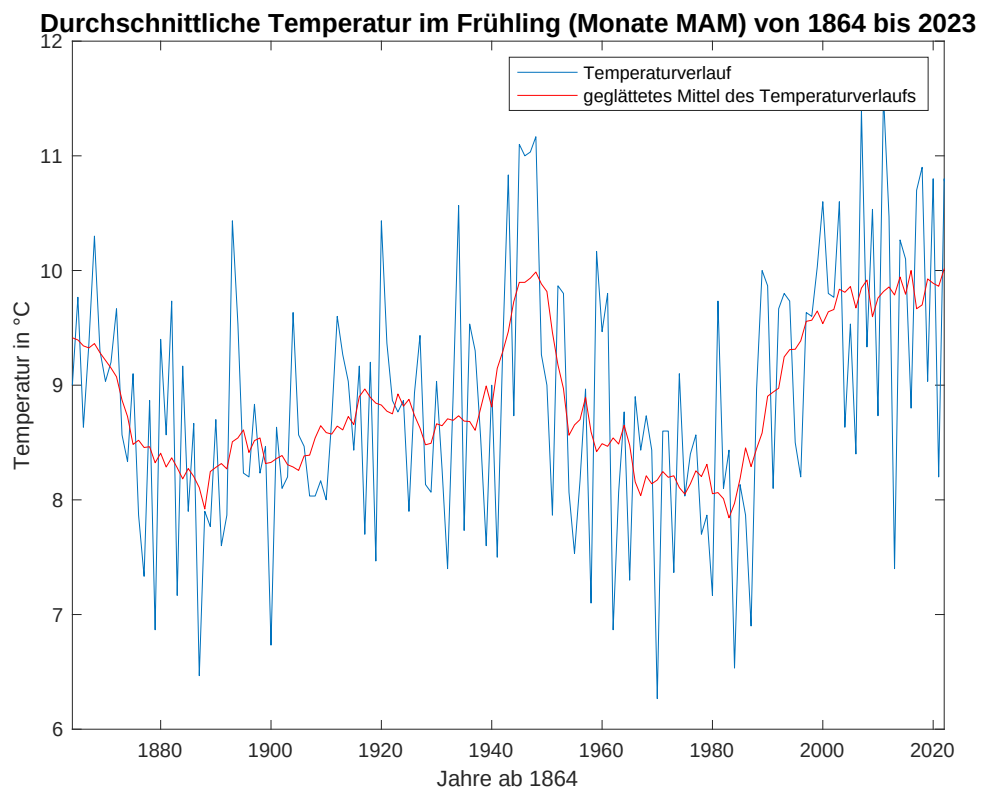


Abb. B.2: Durchschnittliche Frühlingstemperatur (Monate März, April, Mai) von 1864 bis 2023.

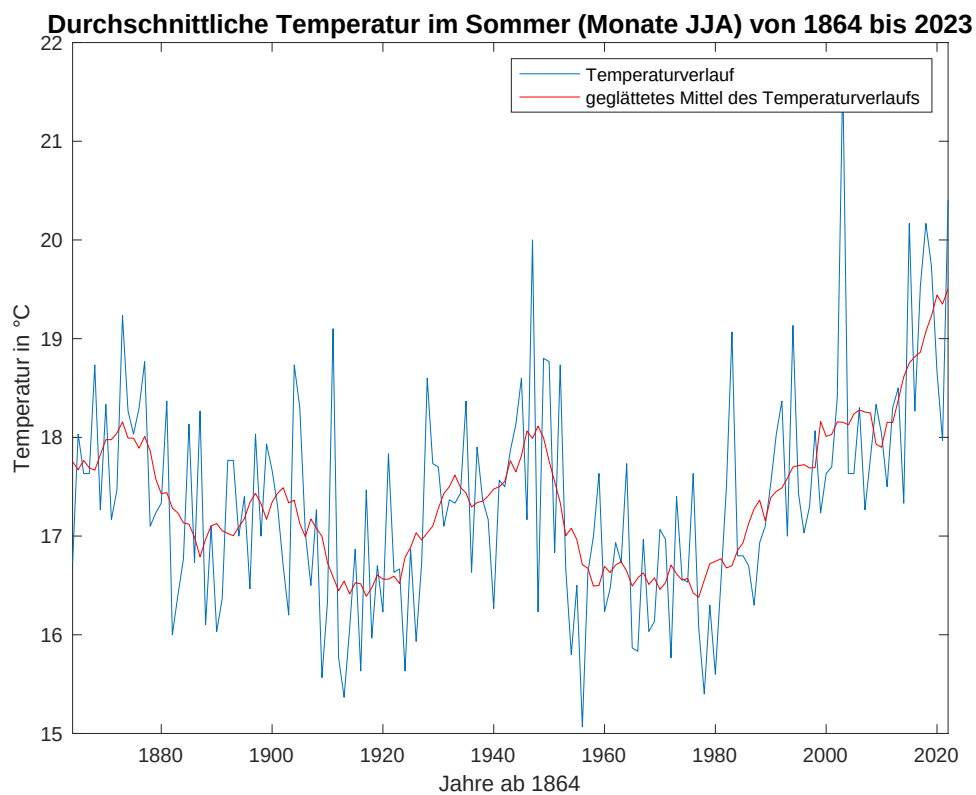


Abb. B.3: Durchschnittliche Sommertemperatur (Monate Juni, Juli, August) von 1864 bis 2023.

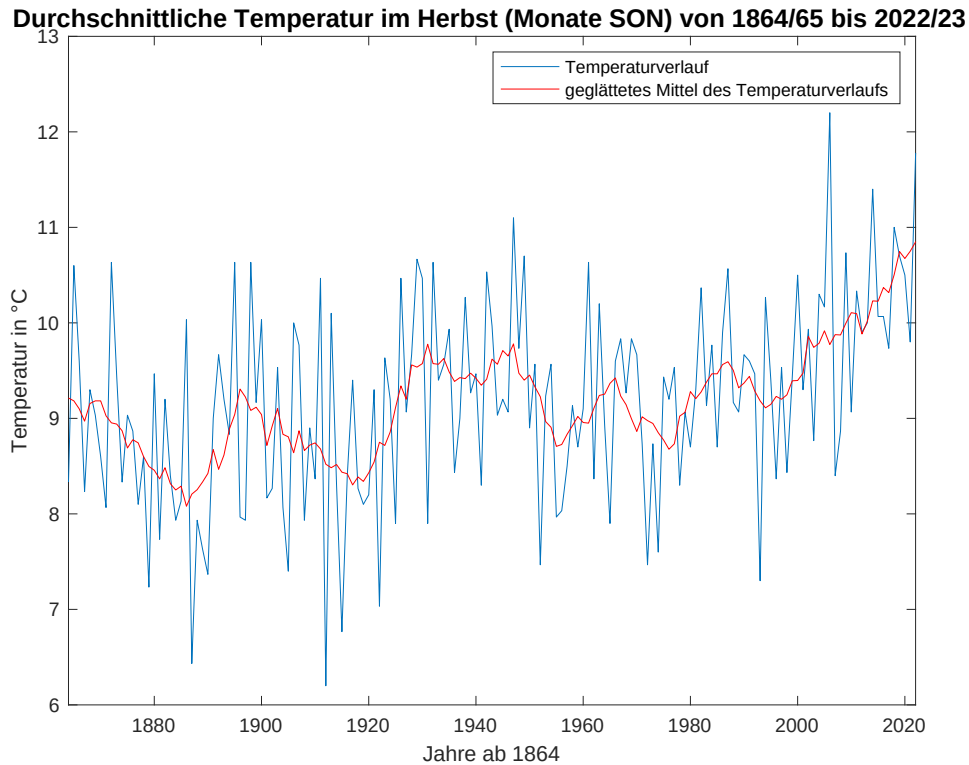


Abb. B.4: Durchschnittliche Herbsttemperatur (Monate September, Oktober, November) von 1864 bis 2023.

B.2 Niederschlagsdaten

Die Abbildungen B.5 bis B.8 zeigen den Verlauf des durchschnittlichen Niederschlags in den jeweiligen Jahreszeiten Winter, Frühling, Sommer und Herbst. Zur Verdeutlichung der enthaltenen Trends wurde ein geglättetes Mittel hinzugefügt, welches rot in den Abbildungen erscheint.

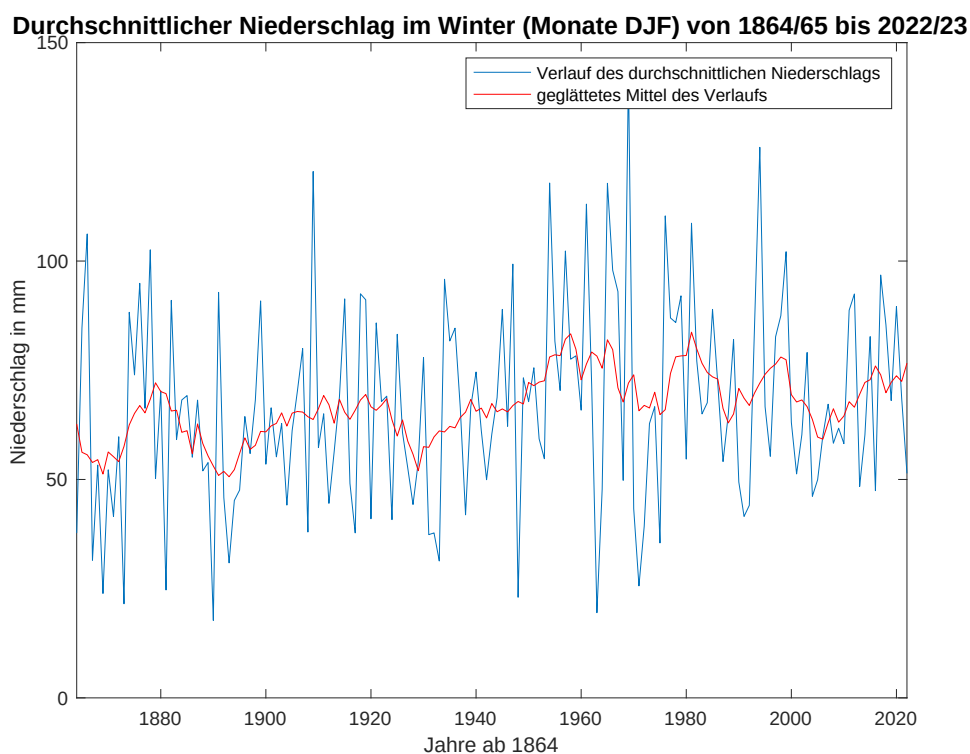


Abb. B.5: Durchschnittlicher Winterniederschlag (Monate Dezember, Januar, Februar) von 1864/65 bis 2022/23.

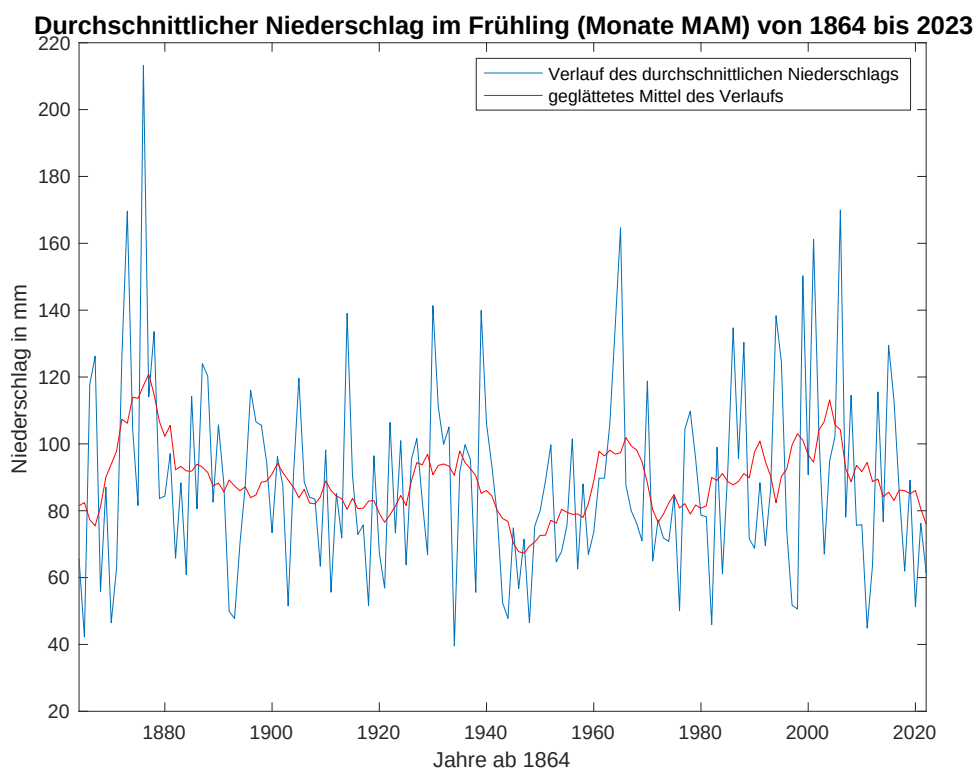


Abb. B.6: Durchschnittlicher Frühlingsniederschlag (Monate März, April, Mai) von 1864 bis 2023.

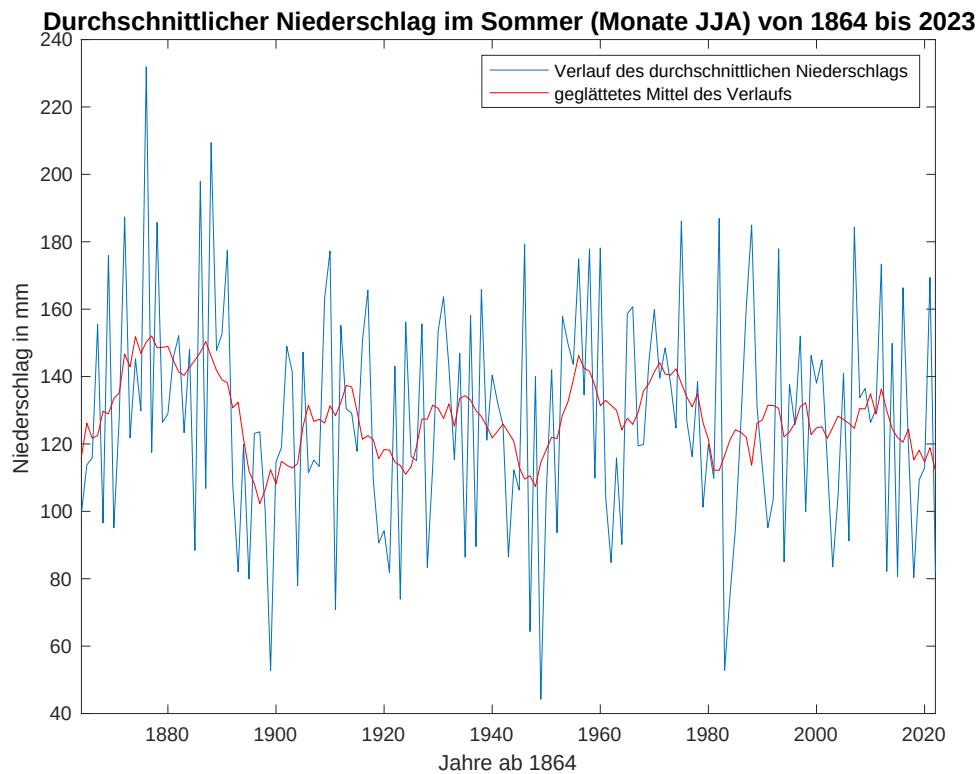


Abb. B.7: Durchschnittlicher Sommerniederschlag (Monate Juni, Juli, August) von 1864 bis 2023.

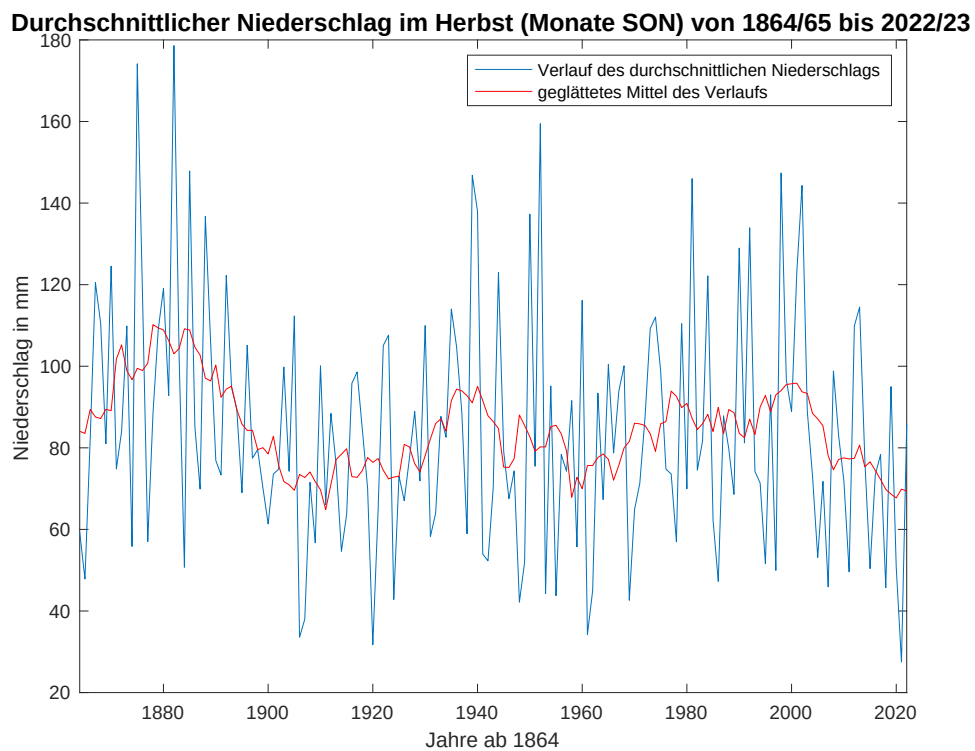


Abb. B.8: Durchschnittlicher Herbstniederschlag (Monate September, Oktober, November) von 1864 bis 2023.

B.3 NAO-Index

Die Abbildungen B.9 bis B.12 zeigen den Verlauf der durchschnittlichen Temperatur in den jeweiligen Jahreszeiten Winter, Frühling, Sommer und Herbst. Da in diesen Rohdaten keine wesentlichen Trends erkennbar sind, wurde auf ein geglättetes Mittel in den Abbildungen verzichtet.

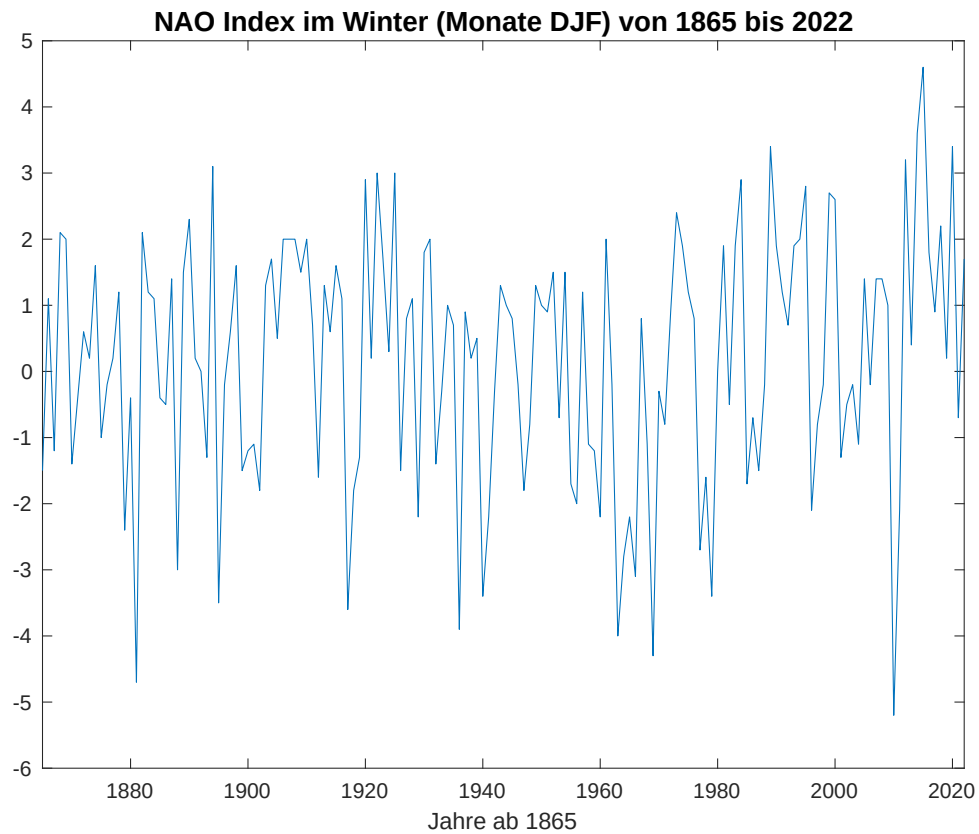


Abb. B.9: NAO-Index im Winter (Monate Dezember, Januar, Februar) von 1864/65 bis 2021/22.

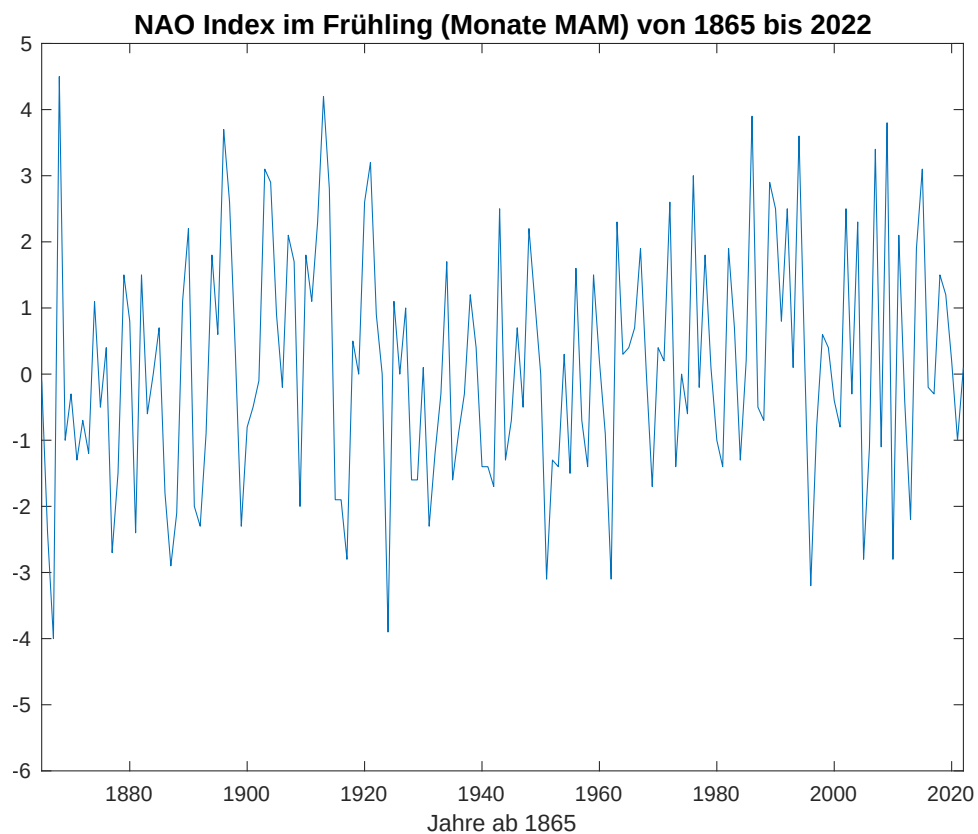


Abb. B.10: NAO-Index im Frühling (Monate März, April, Mai) von 1865 bis 2022.

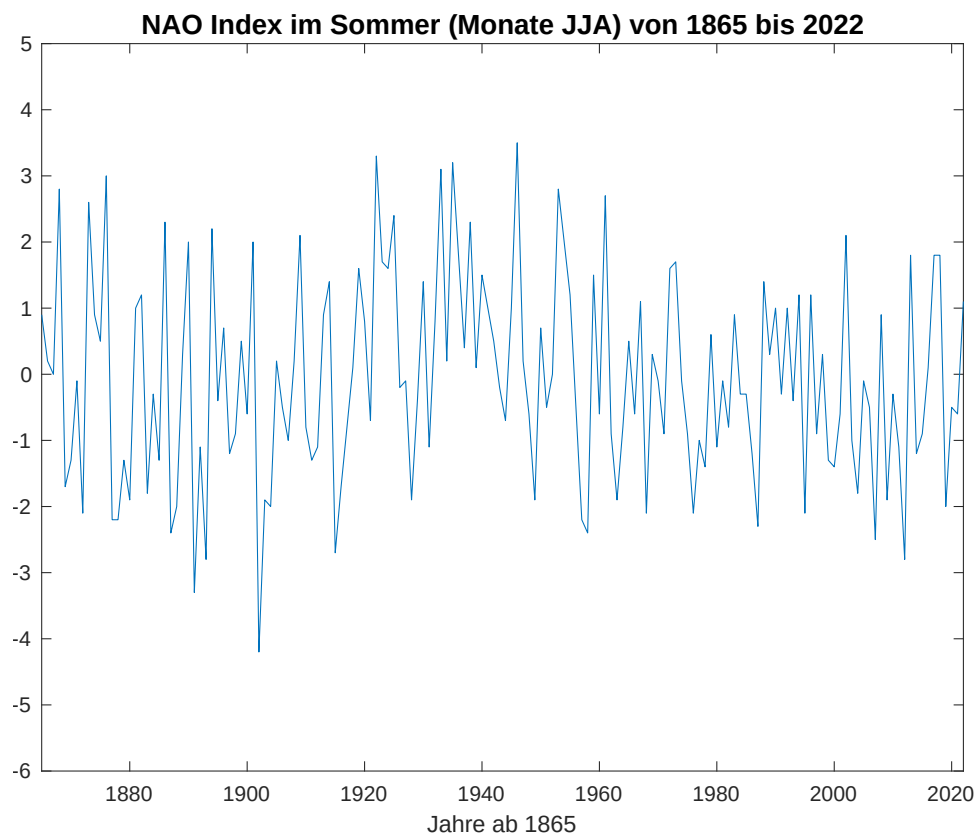


Abb. B.11: NAO-Index im Sommer (Monate Juni, Juli, August) von 1865 bis 2022.

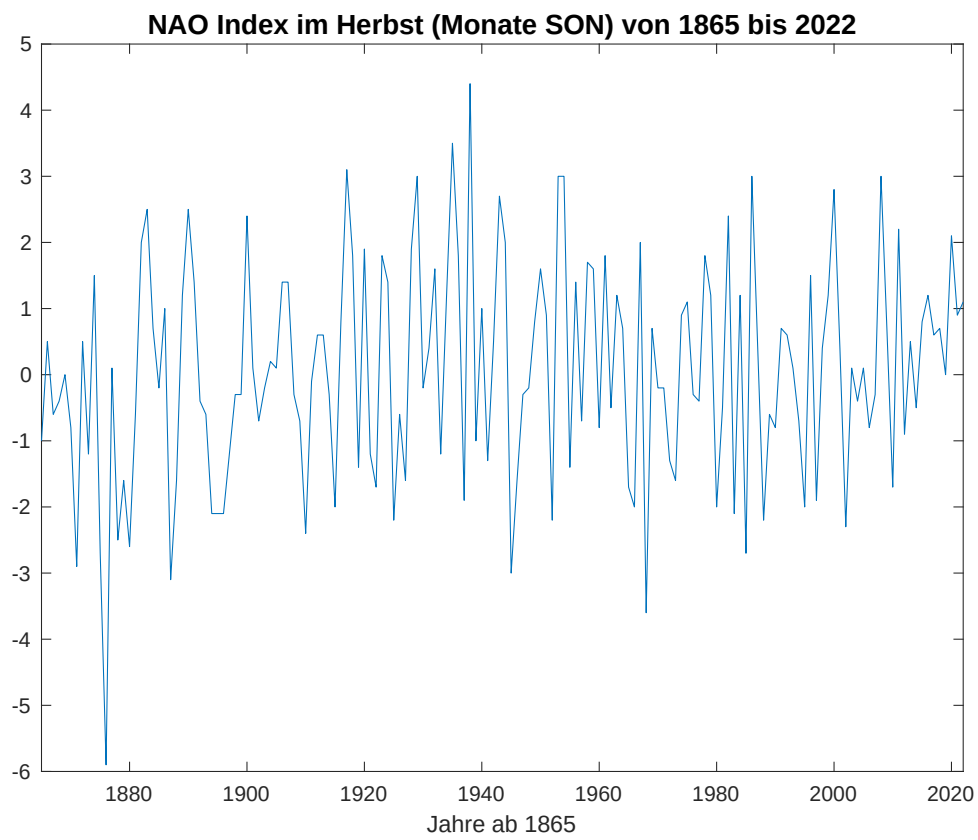


Abb. B.12: NAO-Index im Herbst (Monate September, Oktober, November) von 1865 bis 2022.

Literatur

- [1] Robin Crockett. *A Primer on Fourier Analysis for the Geosciences*. Cambridge University Press, Feb. 2019. ISBN: 9781316543818. DOI: [10.1017/9781316543818](https://doi.org/10.1017/9781316543818).
- [2] James W. Hurrell u. a. *The North Atlantic Oscillation: Climatic Significance and Environmental Impact*. American Geophysical Union (AGU), 2003. DOI: [10.1029/GM134](https://doi.org/10.1029/GM134). URL: <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/book/10.1029/GM134> (besucht am 15. 11. 2024).
- [3] *Die Nordatlantische Oszillation (NAO)*. 2024. URL: <https://www.meteoschweiz.admin.ch/ueber-uns/meteoschweiz-blog/de/2024/01/nordatlantische-oszillation.html#comments> (besucht am 15. 11. 2024).
- [4] James W. Hurrell und Adam Phillips. *Hurrell North Atlantic Oscillation (NAO) Index (station-based)*. 2023. URL: <https://climatedataguide.ucar.edu/climate-data/hurrell-north-atlantic-oscillation-nao-index-station-based> (besucht am 15. 11. 2024).
- [5] *Homogenisierung von Klima-Messreihen*. URL: <https://www.meteoschweiz.admin.ch/klima/klimawandel/entwicklung-temperatur-niederschlag-sonnenschein/homogene-messreihen-ab-1864/homogenisierung-von-klima-messreihen.html> (besucht am 15. 11. 2024).
- [6] Michael Cerna und Audrey F. Harvey. *The Fundamentals of FFT-Based Signal Analysis and Measurement*. 2000. URL: https://www.sjsu.edu/people/burford.furman/docs/me120/FFT_tutorial_NI.pdf (besucht am 15. 11. 2024).
- [7] J. Zhang und J. Moore. «New significance test methods for Fourier analysis of geophysical time series». In: *Nonlinear Processes in Geophysics* (2011). DOI: [10.5194/npg-18-643-2011](https://doi.org/10.5194/npg-18-643-2011). URL: <https://d-nb.info/1142642895/34> (besucht am 15. 11. 2024).
- [8] *MATLAB*. URL: <https://ch.mathworks.com/products/matlab.html> (besucht am 15. 11. 2024).
- [9] *Signal Processing Toolbox*. URL: <https://ch.mathworks.com/products/signal.html> (besucht am 15. 11. 2024).
- [10] *Grundwissen Saitenschwingungen*. URL: <https://www.leifiphysik.de/akustik/akustische-phaenomene/grundwissen/saitenschwingung> (besucht am 15. 11. 2024).
- [11] Christopher Torrence und Gilbert P. Compo. «A Practical Guide to Wavelet Analysis». In: *Bulletin of the American Meteorological Society* 79.1 (1998), S. 61–78. DOI: [10.1175/1520-0477\(1998\)079<0061:APGTWA>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0477(1998)079<0061:APGTWA>2.0.CO;2). URL: https://journals.ametsoc.org/view/journals/bams/79/1/1520-0477_1998_079_0061_apgtwa_2_0_co_2.xml (besucht am 15. 11. 2024).
- [12] Veritasium. *The Remarkable Story Behind The Most Important Algorithm Of All Time*. 2022. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=nmgFG7PUHfo&t=877s> (besucht am 15. 11. 2024).
- [13] Alberto Coronas Salcedo und José M. Baldasano Recio. «Fourier analysis of meteorological data to obtain a typical annual time function». In: *Solar Energy* 32.4 (1984), S. 479–488. DOI: [10.1016/0038-092X\(84\)90262-7](https://doi.org/10.1016/0038-092X(84)90262-7). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0038092X84902627> (besucht am 15. 11. 2024).
- [14] Chris Chatfield. *The Analysis of Time Series: An Introduction*. 4. Aufl. Chapman und Hall, 1989. DOI: [10.1080/00401706.1991.10484848](https://doi.org/10.1080/00401706.1991.10484848).
- [15] Atsu S.S. Dörvlo. «Fourier analysis of meteorological data for Seeb». In: *Energy Conversion and Management* 41.12 (2000), S. 1283–1291. DOI: [10.1016/S0196-8904\(99\)00180-6](https://doi.org/10.1016/S0196-8904(99)00180-6). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0196890499001806> (besucht am 15. 11. 2024).
- [16] Alejandro Castañeda-Miranda, M. de Icaza-Herrera und Víctor M. Castaño. «Meteorological Temperature and Humidity Prediction from Fourier-Statistical Analysis of Hourly Data». In: *Advances in Meteorology* 2019.1 (2019). DOI: [10.1155/2019/4164097](https://doi.org/10.1155/2019/4164097). URL: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/epdf/10.1155/2019/4164097> (besucht am 15. 11. 2024).

- [17] Sabine Kleppek. *Einfluss der NAO auf das Klima Europas anhand von Verteilungsfunktionen atmosphärischer Parameter*. 2002. URL: https://oceanrep.geomar.de/id/eprint/7145/1/Kleppek_Dipl_2002.pdf (besucht am 15. 11. 2024).
- [18] Frank Lunkeit. «Einfluss des Ozeans auf die Nordatlantische Oszillation und die Bedeutung für das Klima in Europa». In: *Warnsignal Klima: Die Meere - Änderungen Risiken* (2011). URL: https://www.klima-warnsignale.uni-hamburg.de/wp-content/uploads/pdf/de/meere/warnsignal_klima-die-meere-kapitel-2_4.pdf (besucht am 15. 11. 2024).
- [19] Ricardo M. Trigo, Timothy J. Osborn und Joao M. Corte-Real. «The North Atlantic Oscillation influence on Europe: climate impacts and associated physical mechanisms». In: *Climate Research* 20 (2002). DOI: 10.3354/cr020009. URL: https://www.researchgate.net/publication/242572901_The_North_Atlantic_Oscillation_influence_on_Europe_Climate_impacts_and_associated_physical_mechanisms (besucht am 15. 11. 2024).
- [20] James W. Hurrell. «Decadal Trends in the North Atlantic Oscillation». In: *Science* 269 (1995). DOI: 10.1126/science.269.5224.676. URL: https://www.researchgate.net/publication/6081131_Decadal_Trends_in_the_North_Atlantic_Oscillation (besucht am 15. 11. 2024).
- [21] David B. Stephenson, Valentina Pavan und Roxana Bojariu. «Is the North Atlantic Oscillation a random walk?». In: *International Journal of Climatology* 20.1 (2000), S. 1–18. DOI: [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0088\(200001\)20:1<1::AID-JOC456>3.0.CO;2-P](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0088(200001)20:1<1::AID-JOC456>3.0.CO;2-P). URL: <https://rmets.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/%28SICI%291097-0088%28200001%2920%3A1%3C1%3A%3AAID-JOC456%3E3.0.CO%3B2-P> (besucht am 15. 11. 2024).
- [22] «Die Nordatlantische Oszillation (NAO)». In: *PROMET* (2008). URL: <https://www.meteoschweiz.admin.ch/ueber-uns/meteoschweiz-blog/de/2024/01/nordatlantische-oszillation.html#comments> (besucht am 15. 11. 2024).
- [23] *Datenportal für Lehre und Forschung (IDAweb)*. URL: <https://www.meteoschweiz.admin.ch/service-und-publikationen/service/wetter-und-klimaprodukte/datenportal-fuer-lehre-und-forschung.html> (besucht am 15. 11. 2024).
- [24] James W. Hurrell und Adam Phillips. *Hurrell North Atlantic Oscillation (NAO) Index (PC-based)*. 2023. URL: <https://climatedataguide.ucar.edu/climate-data/hurrell-north-atlantic-oscillation-nao-index-pc-based> (besucht am 15. 11. 2024).
- [25] *NSF NATIONAL CENTER FOR ATMOSPHERIC RESEARCH*. URL: <https://ncar.ucar.edu> (besucht am 15. 11. 2024).
- [26] Peter Bloomfield. *Fourier Analysis of Time Series*. John Wiley & Sons, Inc., 2000.
- [27] *Square Wave Fourier Series*. 2008. URL: https://de.m.wikipedia.org/wiki/Datei:Square_Wave_Fourier_Series.svg (besucht am 15. 11. 2024).
- [28] Maël Fabien. *Introduction to Continuous Signal Processing*. URL: <https://maelfabien.github.io/machinelearning/Speech6/#3-discrete-vs-continuous> (besucht am 15. 11. 2024).
- [29] Marco Taboga. *Discrete Fourier transform - Spectra*. URL: <https://www.statlect.com/matrix-algebra/discrete-Fourier-transform-amplitude-power-phase-spectrum> (besucht am 15. 11. 2024).
- [30] *Alias-Effekt*. URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Alias-Effekt> (besucht am 15. 11. 2024).
- [31] Hans Gilgen. *Univariate Time Series in Geosciences*. Springer Verlag Berlin, 2005.
- [32] Jakub Ficek u. a. «Analysis of Gastrointestinal Acoustic Activity Using Deep Neural Networks». In: *Sensors* 21 (2021). DOI: 10.3390/s21227602. URL: <https://www.mdpi.com/1424-8220/21/22/7602> (besucht am 15. 11. 2024).
- [33] *fft - Fast Fourier transform*. URL: <https://ch.mathworks.com/help/matlab/ref/fft.html> (besucht am 15. 11. 2024).

- [34] *hamming* - *Hamming window*. URL: <https://ch.mathworks.com/help/signal/ref/hamming.html> (besucht am 15.11.2024).
- [35] *hann* - *Hann (Hanning) window*. URL: <https://ch.mathworks.com/help/signal/ref/hann.html> (besucht am 15.11.2024).
- [36] *detrend* - *Remove polynomial trend*. URL: <https://ch.mathworks.com/help/matlab/ref/detrend.html> (besucht am 15.11.2024).
- [37] *smoothdata* - *Smooth noisy data*. URL: <https://ch.mathworks.com/help/matlab/ref/smoothdata.html> (besucht am 15.11.2024).
- [38] *movmean* - *Moving mean*. URL: <https://ch.mathworks.com/help/matlab/ref/movmean.html> (besucht am 15.11.2024).
- [39] Hristo Zhivomirov. *Pink, Red, Blue and Violet Noise Generation with Matlab*. 2024. URL: <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/42919-pink-red-blue-and-violet-noise-generation-with-matlab> (besucht am 15.11.2024).
- [40] Zach Mueller. *Lesson 7 - Audio*. 2020. URL: <https://walkwithfastai.com/Audio> (besucht am 15.11.2024).

Abbildungsverzeichnis

2.1	Auswirkungen eines positiven NAO-Index auf die Wetterlage	3
2.2	Auswirkungen eines negativen NAO-Index auf die Wetterlage	4
2.3	Durchschnittliche Jahrestemperatur an der Messstation Zürich-Fluntern von 1864 bis 2022	5
2.4	Jährliche Niederschlagssummen an der Messstation Zürich-Fluntern von 1864 bis 2022	5
2.5	Vergleich einer originalen Klimareihe mit einer homogenen Klimareihe	5
2.6	Stationenbasierter jährlicher NAO-Index von 1864 bis 2023	6
2.7	Periodische Rechtecksfunktion $f(t)$ mit den ersten fünf sowie den ersten fünfzehn Termen ihrer Fourierreihe	7
2.8	Fourier-Transformation einer kontinuierlichen Funktion	9
2.9	Sampling-Prozess einer kontinuierlichen Funktion	10
2.10	DFT von gesampelten Punkten	10
2.11	Vereinfachtes Frequenzspektrum	11
2.12	Sampling-Prozess einer Funktion mit einer Frequenz f höher als f_{nyq}	12
2.13	Verzerrtes Frequenzspektrum aufgrund von Leakage	13
2.14	Hann-Window und Hamming-Window im Vergleich	13
2.15	Bereinigtes Frequenzspektrum durch ein Hann-Window	14
2.16	DFT von Daten mit Trends	14
2.17	DFT von Daten, bei denen der Trend zuvor entfernt wurde	15
2.18	Flussdiagramm der Vorgehensweise	19
3.1	Frequenzspektrum der Temperaturdaten im Winter (Monate Dezember, Januar, Februar).	21
3.2	Frequenzspektrum der Temperaturdaten im Frühling (Monate März, April, Mai).	22
3.3	Frequenzspektrum der Temperaturdaten im Sommer (Monate Juni, Juli, August).	22
3.4	Frequenzspektrum der Temperaturdaten im Herbst (Monate September, Oktober, November).	23
3.5	Signifikanztest des Frequenzspektrums der Temperaturdaten im Winter (Monate Dezember, Januar, Februar).	24
3.6	Signifikanztest des Frequenzspektrums der Temperaturdaten im Frühling (Monate März, April, Mai).	25
3.7	Signifikanztest des Frequenzspektrums der Temperaturdaten im Sommer (Monate Juni, Juli, August).	25
3.8	Signifikanztest des Frequenzspektrums der Temperaturdaten im Herbst (Monate September, Oktober, November).	26
3.9	Frequenzspektrum der Niederschlagsdaten im Winter (Monate Dezember, Januar, Februar).	27
3.10	Frequenzspektrum der Niederschlagsdaten im Frühling (Monate März, April, Mai).	27
3.11	Frequenzspektrum der Niederschlagsdaten im Sommer (Monate Juni, Juli, August).	28
3.12	Frequenzspektrum der Niederschlagsdaten im Herbst (Monate September, Oktober, November).	28
3.13	Signifikanztest des Frequenzspektrums der Niederschlagsdaten im Winter (Monate Dezember, Januar, Februar).	30
3.14	Signifikanztest des Frequenzspektrums der Niederschlagsdaten im Frühling (Monate März, April, Mai).	30
3.15	Signifikanztest des Frequenzspektrums der Niederschlagsdaten im Sommer (Monate Juni, Juli, August).	31
3.16	Signifikanztest des Frequenzspektrums der Niederschlagsdaten im Herbst (Monate September, Oktober, November).	31
3.17	Frequenzspektrum des NAO-Index im Winter (Monate Dezember, Januar, Februar).	32
3.18	Frequenzspektrum des NAO-Index im Frühling (Monate März, April, Mai).	33

3.19	Frequenzspektrum des NAO-Index im Sommer (Monate Juni, Juli, August).	33
3.20	Frequenzspektrum des NAO-Index im Herbst (Monate September, Oktober, November).	34
3.21	Signifikanztest des Frequenzspektrum des NAO-Index im Winter (Monate Dezember, Januar, Februar).	35
3.22	Signifikanztest des Frequenzspektrum des NAO-Index im Frühling (Monate März, April, Mai).	36
3.23	Signifikanztest des Frequenzspektrums des NAO-Index im Sommer (Monate Juni, Juli, August).	36
3.24	Signifikanztest des Frequenzspektrums des NAO-Index im Herbst (Monate September, Oktober, November).	37
3.25	Vergleich der Frequenzspektren der Temperaturdaten und des NAO-Index im Winter (Monate Dezember, Januar, Februar).	38
3.26	Vergleich der Frequenzspektren der Temperaturdaten und des NAO-Index im Frühling (Monate März, April, Mai).	38
3.27	Vergleich der Frequenzspektren der Temperaturdaten und des NAO-Index im Sommer (Monate Juni, Juli, August).	39
3.28	Vergleich der Frequenzspektren der Temperaturdaten und des NAO-Index im Herbst (Monate September, Oktober, November).	39
3.29	Vergleich der Frequenzspektren der Niederschlagsdaten und des NAO-Index im Winter (Monate Dezember, Januar, Februar).	41
3.30	Vergleich der Frequenzspektren der Niederschlagsdaten und des NAO-Index im Frühling (Monate März, April, Mai).	41
3.31	Vergleich der Frequenzspektren der Niederschlagsdaten und des NAO-Index im Sommer (Monate Juni, Juli, August).	42
3.32	Vergleich der Frequenzspektren der Niederschlagsdaten und des NAO-Index im Herbst (Monate September, Oktober, November).	42
4.1	Beispiel eines Spektrogramms	50
B.1	Durchschnittliche Wintertemperatur (Monate Dezember, Januar, Februar) von 1864/65 bis 2022/23.	61
B.2	Durchschnittliche Frühlingstemperatur (Monate März, April, Mai) von 1864 bis 2023.	62
B.3	Durchschnittliche Sommertemperatur (Monate Juni, Juli, August) von 1864 bis 2023.	62
B.4	Durchschnittliche Herbsttemperatur (Monate September, Oktober, November) von 1864 bis 2023.	63
B.5	Durchschnittlicher Winterniederschlag (Monate Dezember, Januar, Februar) von 1864/65 bis 2022/23.	64
B.6	Durchschnittlicher Frühlingsniederschlag (Monate März, April, Mai) von 1864 bis 2023.	64
B.7	Durchschnittlicher Sommerniederschlag (Monate Juni, Juli, August) von 1864 bis 2023.	65
B.8	Durchschnittlicher Herbstniederschlag (Monate September, Oktober, November) von 1864 bis 2023.	65
B.9	NAO-Index im Winter (Monate Dezember, Januar, Februar) von 1864/65 bis 2021/22.	67
B.10	NAO-Index im Frühling (Monate März, April, Mai) von 1865 bis 2022.	68
B.11	NAO-Index im Sommer (Monate Juni, Juli, August) von 1865 bis 2022.	68
B.12	NAO-Index im Herbst (Monate September, Oktober, November) von 1865 bis 2022.	69